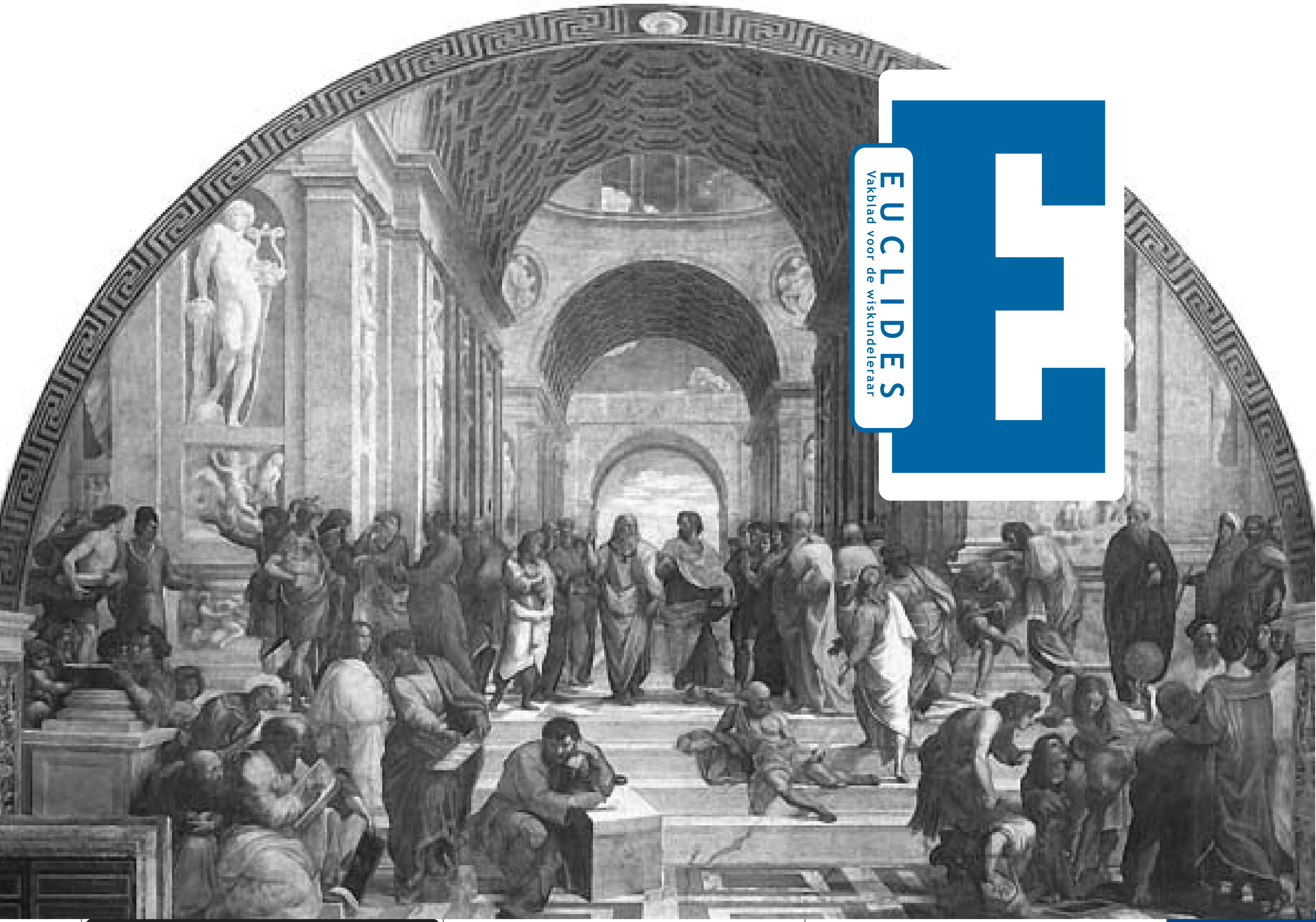
juni 2001 ~ nr 8 ~ jaargang 76

Euclides' moeilijkste eeuw



EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

8

JUNI 2001 JAARGANG 76

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Veldzichtstraat 24, 3731 GH De Bilt
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen:

- goede afdruk met illustraties/foto's/ formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette of per e-mail: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl

Voorzitter
Drs. M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: M.Kollenveld@nvvw.nl
Secretaris
W. Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: W.Kuipers@nvvw.nl
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
produktie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie

Contributie per ver. jaar: *f* 80,00
Studentleden: *f* 40,00
Leden van de VWWL: *f* 55,00
Lidmaatschap zonder Euclides: *f* 55,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: *f* 85,00 per jaar.
Voor instituten en scholen: *f* 240,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor *f* 30,00. Opzeggingen vóór 1 juli.

INHOUD

[Van de redactietafel]

Als dit nummer verschijnt zijn de examens net achter de rug. De deadline van dit stukje ligt echter precies in de examenperiode.
De examens vbo/mavo C/D, vwo B1 en B12 en havo A12 zijn inmiddels geweest. De commentaren die, dagelijks aangevuld, te lezen zijn op de website van de Vereniging, gaan vooral over details in de opgaven en over de afbakeningen van het examenprogramma. Er lijken zich geen regelrechte rampen te hebben voorgedaan.
Maar misschien weet u na de definitieve scorevaststelling inmiddels beter.
Wel hoor ik van diverse kanten dat het examen voor vbo/mavo C/D behoorlijk lastig was dit jaar vergeleken met de vorige jaren.
De vraag is of dat een nieuwe trend is of een eenmalige uitschieter.
Mogelijk dat de bespreking in het eerste nummer van de nieuwe jaargang daar meer licht op zal werpen.

Examen vwo wiskunde B1 en B12
Als ik deze examens vergelijk met het examen oude stijl, moet toch wel geconstateerd worden dat er een grote verandering heeft plaatsgevonden. Die examens verschillen heel erg van elkaar, niet alleen visueel, maar ook in datgene waarop de nadruk wordt gelegd.
Was het de gewoonte dat bijvoorbeeld voor de denkstap die met inzicht te maken had, 2 punten werden gegeven en voor het verder technisch uitwerken 6 punten, dan zie je nu dat het meer in de richting gaat van 6 punten voor de denkstappen die met inzicht te maken hebben en nog 2 punten voor de technische uitwerking (met de grafische rekenmachine).
Dat lijkt me op zich een verandering die het wiskundeonderwijs wel eens waardevoller en interessanter zou kunnen maken.
Maar genoeg over de eindexamens. Nummer 1 van de nieuwe jaargang zal vrijwel geheel in het teken staan van die examens met alle gegevens, besprekingen, commentaren en dergelijke.
Een nummer dat u dus niet mag missen. Het is met name ook een belangrijke schakel in het opbouwen van een nieuwe examentraditie rondom de examens van de Tweede fase havo en vwo.

Nieuwe hoofdredacteur
Enige tijd geleden verscheen een oproep voor een nieuwe hoofdredacteur van dit blad. Inmiddels zijn de procedures daar rondom afgelopen. Dus nu kan ik nog net in dit nummer melden, dat ik, na 5 jaar met veel plezier voor Euclides gewerkt te hebben, het stokje door geef aan de nieuwe hoofdredacteur: Marja Bos. Zij neemt vanaf nummer 1 van de nieuwe jaargang de verantwoordelijkheid over.
Dit is derhalve het laatste stukje *Van de redactietafel* van mijn hand. Het geeft mij nog eenmaal de mogelijkheid om alle auteurs die de afgelopen jaren een bijdrage aan Euclides hebben geleverd, van harte te bedanken voor hun inzet en creativiteit.
Ik heb vele inspirerende contacten gehad met allerlei verschillende mensen en hun soms heel verschillende kijk op het wiskundeonderwijs.
Zonder bijdragen van mensen die het wiskundeonderwijs een warm hart toedragen, zou dit blad niet kunnen bestaan.
Het e-mailadres van de redactie, *redactie-euclides@nvvw.nl*, blijft hetzelfde. Vanaf 1 juni komen de e-mails dan vanzelf terecht bij de nieuwe hoofdredacteur.

Kees Hoogland



Euclides' moeilijkste eeuw

[Ed de Moor]

Zo'n 2300 jaar geleden heeft Euclides de meetkunde als eerste vak tot een zuiver abstracte wetenschap verheven. Meetkunde heeft daardoor voor eeuwenlang het aureool gekregen van een discipline waaraan men kan leren redeneren. Dit heeft een blokkerend effect op de ontwikkeling van de didactiek gehad. Reeds in de 19-de eeuw zijn er pogingen ondernomen om een informele, intuïtieve start van het meetkundeonderwijs te ontwerpen, zodat ook de jongste kinderen kennis kunnen maken met dit prachtige en nuttige vak. Over deze zoektocht, die met name in de 20-ste eeuw in Nederland enkele hoogtepunten heeft gekend, gaat dit artikel. Het is een samenvatting/bewerking van een lezing tijdens het lustrum ter gelegenheid van het 75-jarig bestaan van de NVvW in november 2000.

Axiomatiek als hinderpaal

Goed rekenonderwijs begint met gewoon tellen. Daarbij worden geen definities, axioma's of stellingen gebruikt. Alle begrippen en vaardigheden worden onderwezen vanuit de natuurlijke structuren van de getallen en het positiesysteem, zoals die historisch gegroeid zijn. Zo'n natuurlijke ontwikkeling van een schoolvak en zijn didactiek wordt een *historisch-genetische aanpak* genoemd. Uiteraard kan men de rekenkunde als een logisch systeem opzetten, maar dat is iets voor een hogere wiskundestudie. Hierin zien we meteen het verschil met het aanvankelijk meetkunde-onderwijs. Dit vak kwam tot enige tientallen jaren geleden pas op de middelbare school aan de orde. En tot 1968 begon het juist wel met axioma's, definities en stellingen.

Geometrie betekent oorspronkelijk niets anders dan het meten van de aarde; denk bijvoorbeeld aan de meting van de omtrek van de aarde door Eratosthenes. Maar deze natuurlijke *meet-kunde* heeft een historische ontwikkeling doorgemaakt, die betrekkelijk snel tot een abstract systeem heeft geleid. Euclides heeft dit zo'n 2300 jaar geleden in zijn prachtige *Elementen* neergelegd. Daardoor werd de meetkunde het paradigma van een zuiver abstracte wetenschap en werd het dé discipline waaraan je kunt leren redeneren. Dit is een van de redenen waardoor een historisch-genetische aanpak van het aanvankelijk meetkundeonderwijs geblokkeerd is. In feite heeft Euclides ons bij de ontwikkeling van de didactiek in de weg gestaan.

Enkele staaltjes van redeneren

Een voorbeeld van dit 'leren redeneren' is de stelling van de concurrentie van de drie middelloodlijnen van een driehoek, die tot 1968 één van de sluitstukken van het meetkundeonderwijs van het eerste jaar van de toenmalige middelbare school, ook van de Mulo, was. Om die stelling te kunnen bewijzen dienden de leerlingen de middelloodlijn van een lijnstuk te kennen als de verzameling van *alle* punten, die gelijke afstanden hebben tot de uiteinden van dat lijnstuk. De moeilijkheid zit in het woordje alle. Voor het bewijs moet namelijk zowel de 'heen-' als de 'terug-'redenering gemaakt worden. Heen: ieder punt van de middelloodlijn heeft de bedoelde eigenschap. En terug: als een punt die eigenschap heeft dan ligt het ook op die lijn.

In figuur 1 zijn de twee meest voorkomende congruentie-bewijzen afgebeeld, zoals die zo'n 50 jaar terug werden behandeld. Voor de meeste leerlingen om dol van te worden, want die eigenschap kon je toch 'zo zien'. Maar je hebt de 'heen-' en terug-' redenering wel nodig om een zuiver bewijs te leveren van het feit dat de drie middellodlijnen van een driehoek door één punt gaan.

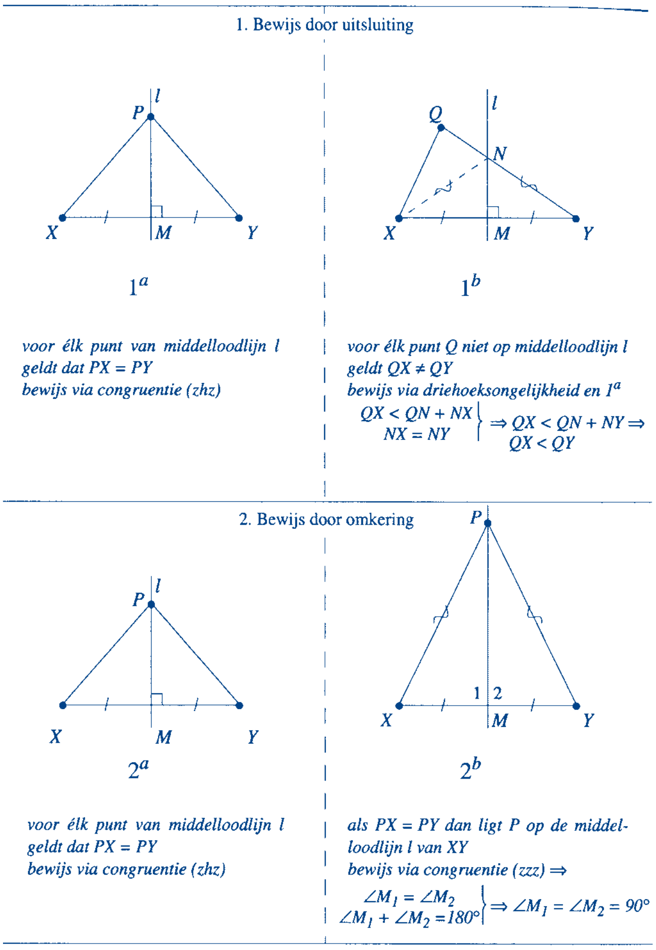
Volgens enkele spaarse kwantitatieve gegevens uit de jaren 50 kon hooguit eenderde van de dertienjarige leerlingen van HBS en Gymnasium dit aan. Toch geloofde men toen sterk dat dit soort oefeningen een positieve transfer zou hebben op het logisch leren denken. Niet alleen binnen de wiskunde, maar ook binnen andere disciplines, zelfs in algemene zin. Dit is wat men de *vormende waarde* van de wiskunde noemt. De omkeerstellingen waren sowieso een bijzonder lastig onderwerp. Niet alleen in psychologische zin, maar ook in mathematisch opzicht. Het bewijs dat de bissectrices van de basishoeken van een gelijkbenige driehoek gelijk zijn, is simpel, maar de omkering is een gerenommeerd lastig geval. Pierre van Hiele gaf van deze omkeringen in 1957 in zijn proefschrift *De problematiek van het inzicht* een mooi voorbeeld (zie figuur 2).

Gedurende de eerste helft van de 20-ste eeuw werd er in de eerste vier klassen van het Gymnasium en de eerste drie klassen van de HBS planimetrie onderwezen. De nadruk lag op *bewijzen en construeren à la Euclides*. En dat werd geoefend aan behoorlijk lastige problemen, waarbij van ingenieuze hulplijnen gebruik gemaakt moest worden, zoals bij de rechte van Euler, de lijn van Wallace, de cirkels van Apollonius, de stellingen van Ceva en Menelaos, om er maar een paar te noemen. Men sprak in die tijd wel van de microscopie van de driehoek. Zelf heb ik overigens als leerling de negenpuntscirkel van Feuerbach als een hoogtepunt ervaren. Maar voor de meeste leerlingen, zelfs op een gymnasium, was dit planimetrie-curriculum een absolute crime.

Ontdekking van de aanschouwelijkheid

Nu was meetkunde in vroeger tijden voorbehouden aan de élite, die de Universiteit en de Latijnse school konden bezoeken. Maar toen in de 19-de eeuw het onderwijs ook voor bredere lagen van de bevoking toegankelijk werd, ontstond er behoefte aan een andere benadering. Gelukkig kwam juist in deze eeuw het principe van de *aanschouwelijkheid* centraal te staan. Zo ontwierp Pestalozzi (1746-1826) een nieuw vak voor de lagere school: de vormleer. Maar dit is eigenlijk nooit iets geworden, met uitzondering van de meetkundige speelleermaterialen van Fröbel (1782-1852), waarvan een aantal nog altijd gebruikt wordt. In Nederland is het met name Jan Versluys (1845-1920) geweest, die in de 19-de eeuw getracht heeft een eenvoudige praktische vormleer voor de lagere school te ontwikkelen. Verder schreef hij in 1874 een didactiekboek voor het wiskundeonderwijs, waarin *aanschouwelijkheid, geleide herontdekking en de heuristische werkwijze* al aanbevolen werden.

Ook vooraanstaande wiskundigen als Poincaré spraken zich uit voor een meer aanschouwelijke start van de meetkunde. Het is echter vooral Felix Klein (1849-1925) geweest, die tijdens de eerste internationale didactiekconferenties aan het begin van de 20-ste eeuw dit standpunt voluit naar voren heeft gebracht. In het bijzonder achtte hij dit ook een domein voor de lagere school. In die tijd kwam internationaal ook de Nieuwe Schoolbeweging op. Er ontstond aandacht voor 'het kind als individu', maar ook werd in progressieve kringen het activiteitsprincipe of 'leren door doen' gepropageerd. In Nederland werd dit op geheel eigen

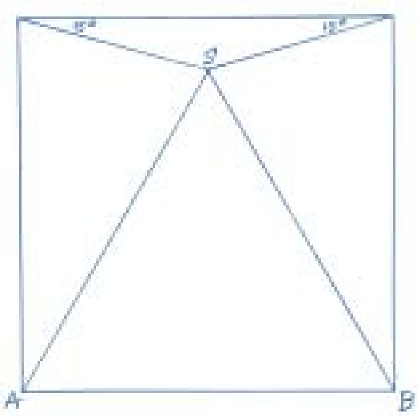


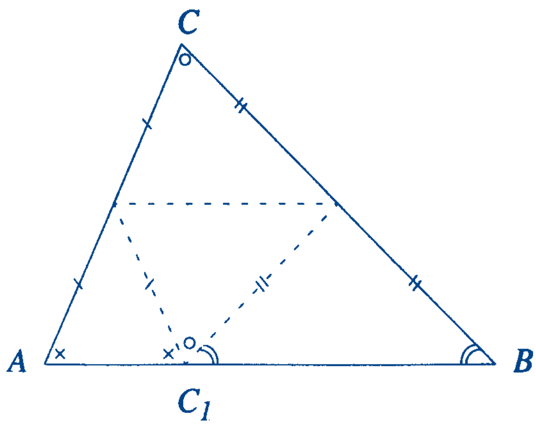
1 **Logisch-deductieve bewijzen van de middelloodlijnstelling (De Moor, 1999)**

wijze vormgegeven door Jan Ligthart (1859-1916) voor de lagere school, voor het voortgezet onderwijs door Willem Reindersma (1877-1946). Voor het eerst werd in de toen opkomende denkpsychologische school met harde cijfers aangetoond dat kinderen op 12-jarige leeftijd in het algemeen nog geen abstracte redeneringen kunnen voltrekken. Zo ontstond de opvatting van het *psychologisch-genetische principe*, waarbij men in eerste instantie niet uitgaat van het vak, maar van het kind en zijn ontwikkelingsfasen. Uiteraard hoeven het vakmatige en het genetische principe elkaar niet uit te sluiten. In het begin van de 20-ste eeuw werden alle nieuwe uitgangspunten (aanschouwelijkheid, uitgaan van het kind, leren door doen en praktische betekenis) aangegrepen ten behoeve van de vernieuwing van het meetkundeonderwijs.

De boeken van Reindersma en Wolda

Het ‘leren door doen’ en de aanschouwelijkheid waren voor Reindersma, die wis- en natuurkundeleraar aan het eerste Nederlandsch Lyceum te Den Haag was, aanleiding om in 1912 met een *Nieuw leerboek der vlakke meetkunde* te komen. De leerstof wijkt niet wezenlijk af van een gangbaar planimetrieboek uit die tijd, maar de didactische aanpak is totaal anders. Er worden geen definities gegeven, maar er wordt uitgegaan van begrippen, zoals die uit het leven van alle dag bekend zijn. Er wordt gebruik gemaakt van schatten, meten, vouwen, knippen, plakken, tekenen, overtrekken, schuiven, draaien en construeren. Eerst worden de hoeken van verschillende driehoeken gemeten en opgeteld. Daarna volgt een vouwbewijs voor de stelling dat de som van de drie hoeken van een driehoek 180° is (zie figuur 3).
Het mentale knippen, plakken en verschuiven, wat we omstructureren van figuren noemen, komt vooral te pas bij oppervlaktebepalingen. Het principe van de lijnsymmetrie wordt zoveel mogelijk uitgebuit. Vooral de grondstructies, die gebaseerd zijn op de eigenschappen van de ruit, krijgen aandacht. Het boek wordt afgesloten met een eenvoudig legpuzzelbewijs van Pythagoras. Dit boek had een dubbel doel: het kon dienst doen als een eenvoudig systematisch meetkundeboek voor de Mulo en MMS, maar het kon tevens als propedeuse dienen voor een meer formele aanpak. In het tweede deel wordt dan vrijwel van voren af aan gestart, maar nu formeler. Het is onwaarschijnlijk dat deze empirische propedeuse ook werkelijk landelijke bekendheid heeft gekregen. In de jaren twintig liet Reindersma deze inleiding dan ook weg. Zijn hele methode is overigens meer dan veertig jaar meegegaan.
Dat kan niet gezegd van de boeken van G. Wolda uit 1921. En dit is niet zo verwonderlijk, want dit was de eerste meetkundecursus, die volledig brak met de





2 Bewijs dat driehoek ABS gelijkzijdig is

3 Vouwbewijs voor de som van de hoeken van een driehoek

euclidische traditie. Hier moet de leerling het gebied zelf gaan exploreren. En wel met problemen, die niet louter tot de meetkunde behoren (zie figuur 4). De opgaven hebben een realistisch karakter en zijn ontleend aan de natuurkunde, de mechanica, de aardrijkskunde of de kosmografie. Vooral het eerste boek is een brede oriëntatie op regelmaat, symmetrie, draaien, verschuiven, spiegelen en verzamelingen (meetkundige plaatsen). Nergens wordt het indirecte bewijs toegepast. Tekenen en construeren zijn de kern-activiteiten; bewijzen steunen op de constructies. Een verbazend origineel leerboek, dat zijn tijd ver vooruit was. Het beleefde echter slechts één druk; men kan zich afvragen of andere didactici dit werk wel gekend hebben.

Was Wolda, die leraar aan de Rijks HBS te Wageningen is geweest, een wat obscure didacticus, voor Reindersma gold dat zeker niet. Deze gaf lezingen en publiceerde over zijn didactische opvattingen over natuurkunde en wiskunde. Hij begreep dat het activiteitsprincipe niet alleen tot concreet handelen beperkt diende te blijven maar vooral een innerlijke, een mentale activiteit moest oproepen. Door zijn collega en vriend, de pedagoog Rommert Casimir, kwam Reindersma in 1913 in contact met de fysicus Paul Ehrenfest en met diens vrouw Tatiana Afanassjewa (1876-1964), die ik verder mevrouw Ehrenfest noem.

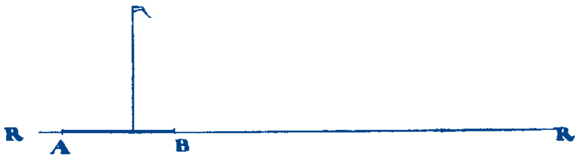
Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa

Met mevrouw Ehrenfest komen we bij de sleutelfiguur van de eerste helft van de 20-ste eeuw. In 1924 publiceerde zij de brochure: *Wat kan en moet het meetkundeonderwijs aan een niet-wiskundige geven?* Dit geschrift leidde tot een felle discussie met Eduard Jan Dijksterhuis (1892-1965), waarover de laatste tijd veel gepubliceerd is. Mevrouw Ehrenfest had bij Klein en Hilbert gestudeerd. Bij Klein werd voor haar het belang van een aanschouwelijke, intuïtieve inleiding in de meetkunde bevestigd; via Hilbert hield zij haar leven lang vast aan het belang van de meetkunde als deductief systeem. Voor haar was meetkunde in eerste instantie ‘ruimteleer’, waarmee we de verschijnselen in de ons omringende ruimte trachten te verklaren en te beschrijven. Zij onderscheidde drie stadia in het meetkundeonderwijs aan leerlingen van 10 tot 18 jaar. Het aanvankelijk meetkundeonderwijs moest beginnen met een *propedeutische cursus* (10 tot 12 jaar), daarna een meer *systematische cursus* (12 tot 16 jaar) om ten slotte met een strikt *axiomatische leergang* (16 tot 18 jaar) te besluiten.

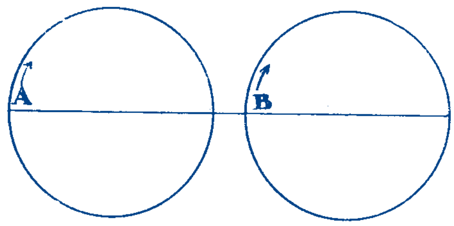
De intuïtieve inleiding voor de leerlingen van 10 tot 12 jaar was eigenlijk voor de lagere school bedoeld. Tijdens deze fase kreeg ook het concreet handelen een plaats, maar dit empirische werk mocht geen doel op zich worden. Het diende altijd in dienst te staan van de ontwikkeling van het voorstellingsvermogen en

§ 33. 1. Precies in het midden van een vierkant, donker vertrek, staat een brandende kaars, en daarom heen beweegt zich — op dezelfde hoogte als de vlam — een vlieg in een cirkelvormige baan. Wat is de weg, dien haar schaduw op de wanden beschrijft ?

§ 44. 1. A B is een schip, dat zich over de rivier R R in de richting van het pijltje voortbeweegt met een eenparige snelheid .——a——. per sec. Een jongen klimt met eenparige snelheid .–b–. per sec. in den mast. Construeer den weg, dien de jongen door de ruimte beschrijft.



5. Twee personen A en B (zie de fig.) bewegen zich langs ge-



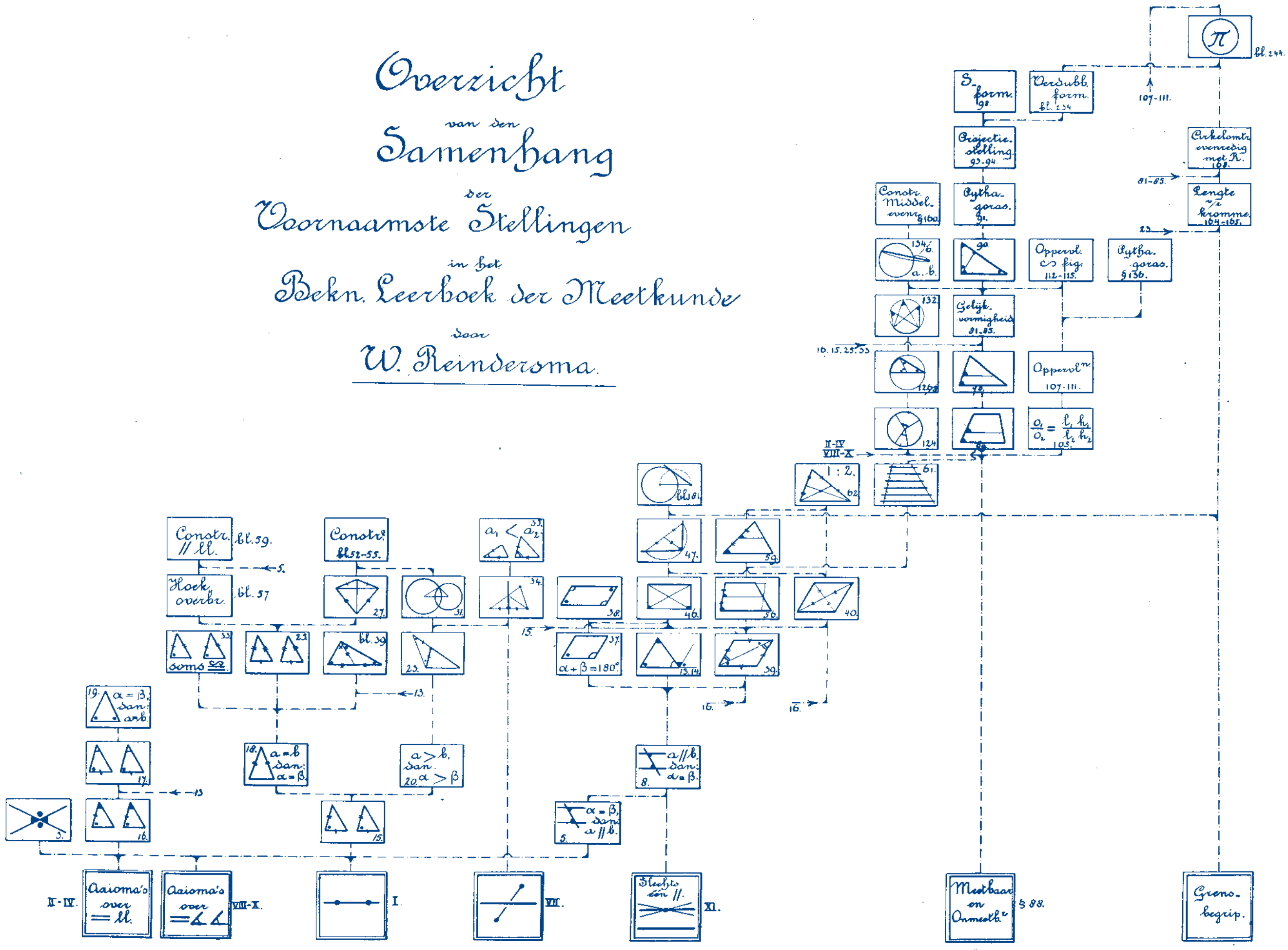
lijke cirkels, met gelijke eenparige hoeksnelheid in dezelfde richting. Een derde persoon X houdt steeds hun midden.

4 **Opgaven uit Wolda's meetkundecursus (1921)**

gepaard te gaan met de denkhandelingen. Helaas werd dit uitgangspunt nog al eens verkeerd begrepen, waardoor deze propedeuse soms ietwat denigrerend afgeschilderd werd als een leergang 'knippen en plakken'.
In de *systematische cursus* voor de leerlingen van 12 tot 16 jaar moest de nadruk meer op het *logische werk* komen te liggen. Niet volgens de traditionele euclidische opbouw, maar aangepast aan het niveau van de kinderen. Praktisch betekende dit, dat evidente stellingen niet bewezen werden, maar (voorlopig) als aanschouwelijke evidenties (axioma's) werden opgevat. Verder dat de leerlingen de stellingen zelf -wel onder leiding van de leraar- dienden te formuleren én bewijzen. Zo dienden ketens van stellingen opgebouwd te worden, ook wel stambomen genoemd (zie figuur 5).
We zien hieruit, dat mevrouw Ehrenfest grote waarde toekende aan het *leren denken*. Dit wordt verder bevestigd in haar ideeën over de laatste fase van het meetkundeonderwijs voor de leerlingen van 16 tot 18 jaar. Hierin dacht zij aan een recapitulatie van al het voorgaande volgens een streng logisch-deductieve opbouw.

Dijksterhuis' standpunt

De kern van de controverse tussen van mevrouw Ehrenfest en Dijksterhuis berustte op het feit dat Dijksterhuis zich bezorgd maakte om de aantasting van het culturele erfgoed van Euclides en de vormende waarde, die hiervan zou uitgaan. De intuïtieve inleiding van mevrouw Ehrenfest zou deze waarden aantasten. Begrijpelijk, want Dijksterhuis was een Platonist pur sang, niet alleen aangaande de wiskunde, maar ook wat de algemene vorming van de jonge mens betrof. Analyse van deze discussie maakt duidelijk dat beide standpunten in feite niet verschilden, althans wat het uiteindelijke doel betrof. Beiden stonden een leergang voor, waarin de leerling kennis moet maken met een logisch-deductief systeem en beiden geloofden heilig in de vormende waarde van de wiskunde. Alleen hun didactische standpunten waren verschillend: mevrouw Ehrenfest met haar drietraps-leergang en Dijksterhuis met zijn *epistemische didactiek*. Daar bedoelde hij mee: geen intuïtieve introductie, *uitgaan van het formele systeem*, en *kennis-theoretisch* onderbouwd. Dit betekende dat de leerling op elk moment in het leerproces volledig inzicht moet hebben in wat hij doet, denkt en zegt. Eigenlijk is het verbazend dat deze controverse toentertijd zo'n heisa heeft veroorzaakt. Maar er zat ook een positieve kant aan. Want ondanks het feit dat Dijksterhuis deze strijd won - het bleef gewoon bij het oude - bleven de pogingen tot vernieuwing doorgaan.



5 Stamboom van stellingen

Drie stromingen

Tengevolge hiervan waren er tussen 1920 en 1940 globaal drie stromingen te onderscheiden.

1 De *logisch-deductieve aanpak*: hierbij werd uitgegaan van de traditionele stof; variërend van schijn-axiomatische, (half-)aanschouwelijke werkwijze tot een streng-logisch-deductieve opzet.

2 De *empirische aanpak*: ook hier werd uitgegaan van de traditionele stof; aandacht voor concreet handelen en experimenteren; uiteindelijk al dan niet axiomatisch opgezet, leidend tot een logisch-deductieve opzet.

3 De *intuïtieve aanpak*: er werd uitgegaan van de realiteit; informele propedeuse als inleiding; geleidelijke overgang naar formeel logische opzet.

Binnen de eerste categorie konden nog twee subgroepen onderscheiden worden. Enerzijds de *gematigde traditionelen:* de leraren, die met een modaal leerboek uit de logisch-deductieve stroming werkten. Anderzijds de *puristische traditionelen:* Dit waren de aanhangers van een streng wetenschappelijke aanpak à la Hilbert. De meest extreme vorm van zo'n streng axiomatische opzet vinden we in het werk van Schogt uit 1929. Hoe formeel en anti-aanschouwelijk deze aanpak was, moge het volgende voorbeeld, dat voor de eerste klas bedoeld was, illustreren:

Helften van congruente lijnstukken zijn congruent.
Onderstelde: AB = A'B', PQ is de helft van AB, P'Q' is de helft van A'B'.
Gestelde: PQ = P'Q'
Bewijs: Er zijn drie gevallen denkbaar: PQ > P'Q', P'Q' > PQ en PQ = P'Q'.
Was PQ>P'Q', dan was volgens stelling 7 PQ +PQ > P'Q' + P'Q' en daar P'Q' + P'Q' = A'B' , volgens stelling 4 AB > A'B'. Dit is in strijd met het onderstelde, dat AB = A'B', dus kan het geval, dat PQ > P'Q' is, zich niet voordoen. Evenzo bewijst men, dat P'Q' > PQ zich niet kan voordoen, omdat daaruit zou volgen, dat A'B' > AB, hetgeen ook in strijd is met het onderstelde. Dus moet PQ = P'Q' zijn.
Hiermede is de stelling bewezen.

In de praktijk werden deze stromingen niet in zuivere vorm aangetroffen. Het modale onderwijs stond vooral in het teken van 'veel sommen maken' en 'begrip achteraf' volgens de opvattingen van de 'gematigde traditionelen'. De empirische stroming werd weinig toegepast en de intuïtieve stroming had alleen nog maar een ideële vorm, want er was in die tijd nog geen leergang, die volgens deze filosofie was uitgewerkt. Mevrouw Ehrenfest zette haar streven naar een intuïtieve inleiding inmiddels voort. In 1931 verscheen



6 **Hoe hoog stond de fotograaf?**

haar beroemde *Übungensammlung*. Dit boekje bevat een kleine tweehonderd ideeën, geordend naar 19 onderwerpen, zoals afstanden, lijn als lichtstraal, symmetrie, schaduw, perspectief en zo meer. Het hoofddoel was het ontwikkelen van het ruimtelijk voorstellingsvermogen. Hier volgen twee vertaalde opgaven, waarvan de aard ons ook vandaag de dag niet onbekend zal voorkomen.

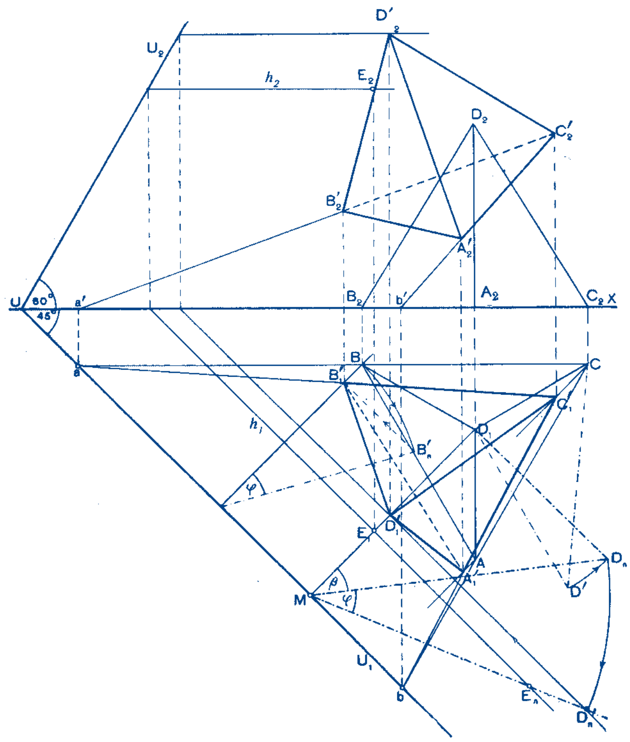
- (nr. 69) Waarom loopt de maan met je mee? Als je in een rijdende trein zit, waarom schieten de dingen, die dichter bij zijn, dan sneller voorbij dan die, welke verder weg zijn?
- (nr. 53) Welke richting moet een vliegtuig in Berlijn nemen om via de kortste route in Moskou te komen? En hoe van Berlijn naar Java? Maak gebruik van een globe en een touwtje. Is de boog van een parallelcirkel op de bol de kortste afstand?

In 1951 noemde Freudenthal dit boekje 'het beste' dat hij tot dan toe op mathematisch-didactisch gebied ooit gezien had. Het heeft toen overigens nauwelijks aandacht gekregen. Maar na de oorlog is het van invloed geweest op het werk van Piet van Albada (1905-1997) en de Van Hieles. En aan het begin van de jaren 1970 bleek het boekje onder meer een bron van inspiratie te zijn voor de Wiskobas-meetkunde in de basisschool, alsmede voor de kijkmeetkundige ontwikkelingen in het voortgezet onderwijs.

Wiskunde Werkgroep

In 1936 werd binnen de 'Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs' de 'Wiskunde Werkgroep' opgericht. Dat waren maar vier leden, maar mevrouw Ehrenfest was erbij en zij werd in de eerste jaren de leidende figuur van deze club, die tot het begin van de jaren 1970 heeft bestaan. Alle bekende didactici van voor en na de oorlog behoorden tot deze didactische pioniers, zoals ze in het Lustrumboek van de NVvW worden omschreven. Vanuit deze groep idealisten hebben zich toen de werkelijke vernieuwingen voltrokken. Het bestuur van de vereniging Wimecos bekeek deze activiteiten overigens met de nodige scepsis. En weer werd in de jaren 30 de meetkunde onderwerp van studie.
Zie nu eerst figuur 6.
Van Albada ontwierp een verzameling werkkaarten in de geest van mevrouw Ehrenfest, die hij na de oorlog op het Montessori-lyceum te Rotterdam heeft toegepast. Er werd gewerkt met concrete materialen, modellen en foto's, er werd getekend, gemeten en geconstrueerd. Ook het esthetische element werd als belangrijk doel gezien. Deze bijzondere inleidende cursus, waarvan het materiaal pas onlangs is

Een regelmatig viervlak ABCD *staat met zijn grondvlak* ABC *op* V_1 *voor* V_2; B(6, 1, 0), C(10, 1, 0). *Bepaal beide projecties. Van een vlak* U_1UU_2 *is* $\angle XUU_1 = 45°$ *en* $\angle XUU_2 = 60°$; U *ligt in* OX *in* (0,8; 0; 0). *Het viervlak wordt om* UU_1 *gewenteld tot het hoekpunt* D *in het vlak* U *valt; bepaal de projecties van het viervlak in de nieuwe stand.*

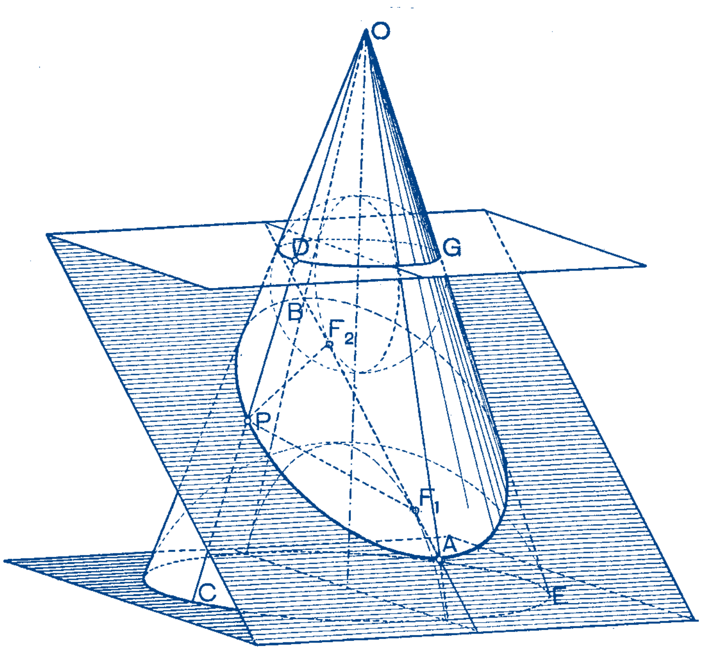


7 BM, eindexamen HBS 1930

teruggevonden, is nooit officieel uitgegeven en heeft daardoor ook geen directe invloed gehad.
In een later geschrift stelde Van Albada een programma voor de HBS voor, dat was verdeeld over een inleidende cursus (1-ste jaar), een systematische opbouw (2-de, 3-de en 4-de jaar) en een formeel-systematisch overzicht (5-de jaar), precies de drieslag van mevrouw Ehrenfest. Het meest opvallend is de derde trap van deze leerlijn, waarin de hele theorie herhaald en geordend moest worden. Het aantal onbewezen stellingen diende teruggebracht te worden tot een minimum. Aparte aandacht eiste hij voor het parallellenaxioma, hetgeen tot een niet-euclidische meetkunde kon leiden.

Publicaties in de jaren 1950

De studies en het onderzoek van de werkgroep mondden in de jaren 1950 uit in talloze publicaties, zowel in *Euclides* als in het *Mededelingenblad* van de Werkgroep, een gestencild blaadje dat een schat van historische informatie bevat. Dit waren de jaren van de meetkundedidactiek. Er kwamen verschillende wetenschappelijke onderzoeken en dissertaties van de grond. Hoogtepunten waren de proefschriften van het echtpaar Van Hiele in 1957. Pierre van Hiele heeft wereldfaam verworven met zijn theorie van de denkniveaus. Dina van Hiele-Geldof (1911-1958) testte de niveautheorie in de praktijk aan de hand van een leergang meetkunde, waarin het idee van de tegelvloeren van mevrouw Ehrenfest centraal stond. Martin Kindt merkte onlangs op dat hij bij herlezing dit werk als een 'didactische roman' had ervaren.
In praktische zin hadden de Van Hieles hun ideeën uitgewerkt in hun *Werkboek der Meetkunde* en in *Van Figuren naar Begrippen*. Maar al dit werk was nog steeds gebaseerd op het aloude meetkundeprogramma, wat betekende dat aan het eind van de eerste klas de stellingen over parallellogrammen en hun bijzonderheden gekend dienden te worden. Het ging nog steeds om leren redeneren en inzicht in het meetkundige systeem. Alles nog steeds gebaseerd op het leerplan van 1937, dat weer stoelde op het ontwerp van H.J.E. Beth en Dijksterhuis uit 1925. Maar ook hiermee ging de Werkgroep zich bemoeien. In 1948 werden vijf commissies (algebra, meetkunde, analytische meetkunde, goniometrie en beschrijvende meetkunde) benoemd met als doel een eensluidend programma voor Gymnasium-B en HBS-B op te stellen. Dit leidde in 1953 tot het rapport *Het wiskunde programma voor het V.H.M.O.* Het argument van de vormende waarde werd niet meer zo prominent naar voren gebracht. Nu werd ook het praktische nut van de wiskunde, vooral als hulpwetenschap voor andere vakken, gepropageerd. Er werden fikse schrappingen in de leerstof voorgesteld, vooral in de gekunstelde onderdelen van de algebra en goniometrie. De



8 **De bollen raken in de brandpunten van de ellips (Schrek, 1924)**

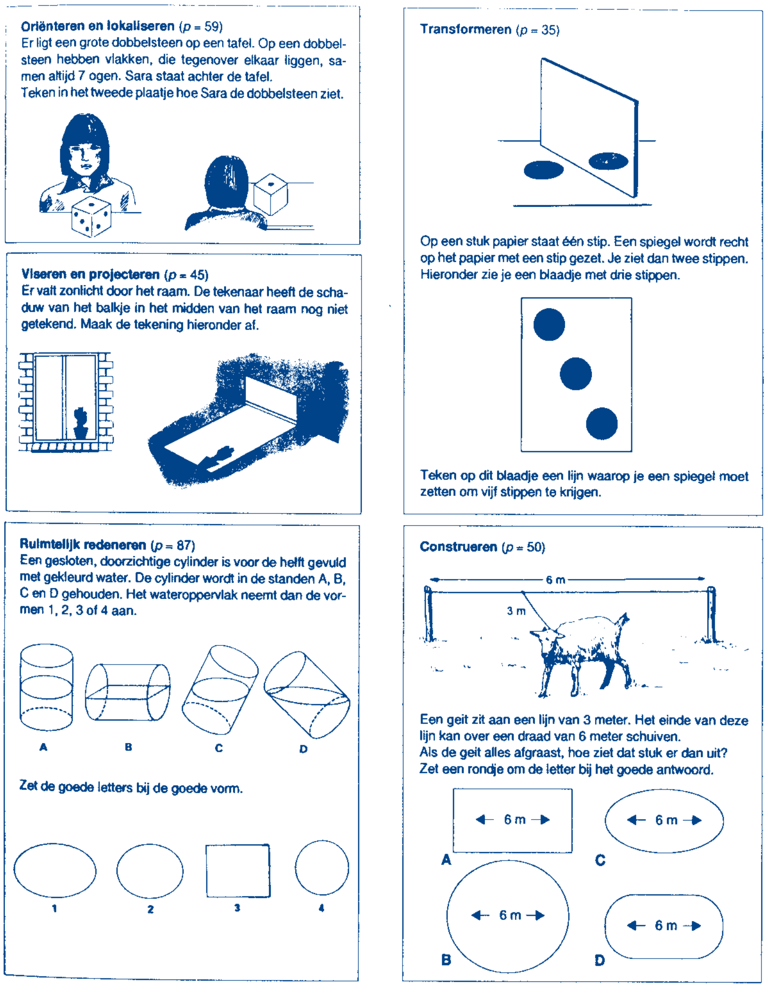
rekenkunde voor de eerste klas van de HBS werd afgevoerd. Men wilde differentiaal- en integraalrekening en statistiek en waarschijnlijkheidsleer aan het programma toevoegen. Maar het gaat nu om de meetkunde.
Men zou natuurlijk verwachten dat er nu eindelijk met de logisch-deductieve start gebroken zou worden, maar ‘een scherpe breuk met de traditie’ leek de Werkgroep niet verantwoord. Men wilde wel de leerstof drastisch beknotten, maar de feitelijke doelstelling van het ‘leren denken’ veranderde niet.

BM en AM op de eindexamens

Een moeilijk punt was het verschil in de eindexamens. Op de HBS werd in de hoogste leerjaren Beschrijvende Meetkunde gegeven, op het Gymnasium Analytische Meetkunde. Velen hadden hun twijfels over het nut en de vormende waarde van de BM. Vooral Freudenthal was nogal tegen dit vak, wat later nog tot pittige confrontaties heeft geleid. Van Albada wilde eigenlijk al veel vroeger met dit vak starten, maar op een manier van eenvoudige aanzichten, zoals in de huidige kijkmeetkunde. In figuur 7 is een eindexamenopgave BM uit 1930 te zien.
Het behoud van de BM werd vooral bemoeilijkt doordat men op de HBS ook de Analytische Meetkunde wilde invoeren. Dit vak had een mooie traditie verworven op het Gymnasium. Zelf heb ik de beginselen van dit vak geleerd uit het uitstekende boek van Schrek, zelfs tot aan de theorie van kegelsnedenbundels en de classificatie van de kegelsneden. Maar ook de samenhang met de synthetische meetkunde als de stelling van Dandelin (zie figuur 8) werden door mijn voortreffelijke wiskundelerares mevrouw Faber-Gouwentak behandeld. Het was voor mij een eye-opener opeens te zien welk een kracht er van de algebraïsche methoden uit kan gaan, maar tevens hoe belangrijk de meetkundige inbedding blijft.
De invloed van het rapport van de Wiskunde Werkgroep was zo groot dat het in 1958 tot een nieuw leerplan voor het totale VHMO leidde. De meetkundeboeken kregen nu een korte intuïtieve inleiding, maar daarna ging men toch weer snel over op het logisch-deductieve werk. Toch kan men zeggen dat met deze programmawijziging er een marginale stap voorwaarts gemaakt was met de intuïtieve inleiding in de meetkunde à la mevrouw Ehrenfest. Zelf vond ze overigens dat het totaal mislukt was.

Euclides onthoofd

Het zou echter nog erger worden. In de jaren 1960 werd aan de klassieke meetkunde de nekslag toegebracht. Dit als gevolg van de New Math-beweging, die in die jaren de kop opstak. In 1961 werd de CMLW geïnstalleerd, die onder meer als taak had om alweer een nieuw leerplan op te stellen. Dit moest

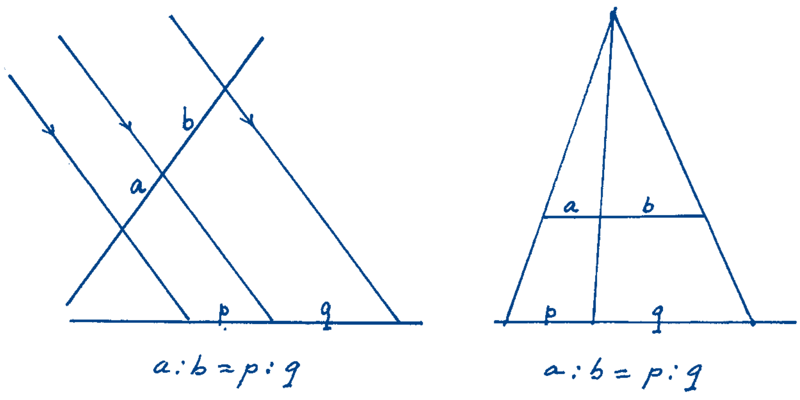


9 **Voorbeelden uit de Pimbo-toets**

tegelijk met de Mammoetwet van 1968 in werking treden, hetgeen ook werkelijk gebeurd is.
De wiskundige Dieudonné had reeds in 1959 zijn befaamde 'Weg met Euclides' uitgesproken. Meetkunde diende alleen nog als een wetenschappelijke structuur behandeld te worden en wel vanuit de algemenere structuur der afbeeldingen, dus als transformaties. Pogingen om een cursus transformatiemeetkunde te ontwikkelen, zoals in de op zich mooie boeken van Troelstra e.a. is verwezenlijkt, verzandden echter ook weer in een soort axiomatiek en hebben het derhalve niet gehaald.
Planimetrie en stereometrie verdwenen dus. Vectormeetkunde kwam er voor in de plaats. Terwijl wij toen maar rekenden uit de boeken van Westerman in plaats van keken en dachten, citeerde ik wel eens het volgende versje: 'Al is de matrix nog zo klein, Zijn eigenwaarde mag er zijn'. Slechts een enkeling, zoals de wiskundige Duparc, verzette zich tegen het slechten van de aloude synthetische meetkunde. De boeken voor de brugklas - aparte meetkundeboeken bestonden niet meer - bevatten een soort quasi-transformatie-meetkunde, waarbij gepreludeerd werd op de latere vectorrekening.
De New Math van de jaren 1960 heeft in feite de historische ontwikkelingsgang op abrupte wijze doorbroken. De erkenning voor het genetische principe, dat al meer dan een eeuw in de aandacht stond, werd zo maar onderuit gehaald. Plotseling werd een anti-genetische werkwijze omarmd door uit te gaan van de wetenschappelijke structuren van de wiskunde. Er heerste een blind geloof in de moderne wiskunde, de leerpsychologie en de technologische ontwikkelingen. Zo kwamen de vernieuwingen niet voort uit het praktische onderwijs, maar werden ze van bovenaf geïnduceerd.

Freudenthals rol

We komen nu bij Hans Freudenthal (1905-1990), de sleutelfiguur van de tweede helft van de 20-ste eeuw. Freudenthal wordt altijd genoemd als degene, die geheel op eigen initiatief getracht heeft de New Math te weren. Dit is echter een mythe; wel heeft hij er zich vooral vanaf de jaren 1970 sterk tegen verzet. Met name sinds zijn aantreden in 1971 op het Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs (IOWO), het huidige Freudenthal Instituut, is er een heel andere kijk ontstaan op het wiskundeonderwijs. Ook de term *realistisch wiskundeonderwijs* is niet door Freudenthal geïntroduceerd, maar door Treffers. Wel staat vast dat Freudenthal een groot protagonist was van meetkunde en wel voor alle niveaus, te beginnen op de kleuterschool. Hij had een geweldige intuïtie voor hoe een kind zich cognitief ontwikkelde. Deze intuïtie paarde hij aan een immense wetenschappelijke kennis op vele domeinen. En hij testte dat ook in de praktijk,

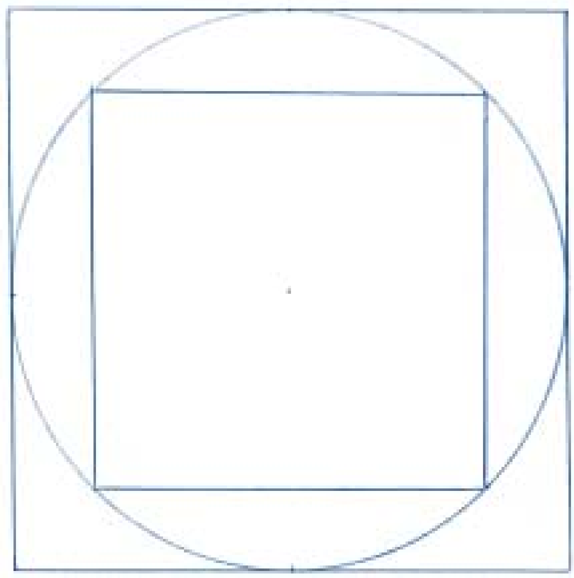


10 **Verhoudingstrouw bij 'zonlicht' en 'lamplicht'**

die hij als noodzakelijk voor de theorievorming zag. Zo voelde hij intuïtief aan dat het *be-grijpen van de ruimte* voor het kind al in de wieg begint. In de ontwikkeling van het kind gaat meetkunde aan het getal vooraf, zo was zijn stelling; vermoedens, die nu met verfijnd hersenonderzoek bevestigd worden. Een ontwerper was Freudenthal niet, wel een bedenker en vooral een denker.
Freudenthal was een bewonderaar van mevrouw Ehrenfest. De Wiskunde Werkgroep noemde hij indertijd de hogeschool van de wiskundedidactiek. Binnen de groep van het IOWO heeft hij zijn didactische inzichten verder ontwikkeld. Net als mevrouw Ehrenfest erkende hij zowel het belang van het historisch-genetische als van het psychologisch-genetische principe. Maar bovenal wees hij op de verschijnselen uit de bestaande of gedachte realiteit als vertrekpunt voor het onderwijs.

Realistische meetkunde

De *realistische meetkunde* is ontstaan in de jaren 1970 en wel binnen de Wiskobas-groep, die een nieuw reken-wiskunde-leerplan voor het basisonderwijs moest ontwikkelen. Freudenthal was een actief medewerker van deze groep. Originele bijdragen aan de realistische meetkunde hebben vooral Jan van den Brink, Hans ter Heege en Edu Wijdeveld geleverd. Fred Goffree voorzag het vak van de termen *Kijken, Doen, Denken en Zien*, waarmee zoveel treffender en meer specifiek de zo vaak gebezigde trits 'concreet-schematisch-abstract' omschreven wordt.
Na een afwezigheid van 100 jaar is meetkunde nu teruggekeerd op de basisschool. Het aanbod voor meten en meetkunde in de methoden bedraagt ongeveer 20%. De werkelijke uitvoering varieert echter sterk. De Cito-eindtoets voor het BO bevat elk jaar enkele eenvoudige meetkunde-items. Er worden voor de basisschool voor meetkunde vijf karakteristieken onderscheiden: oriënteren en lokaliseren, viseren en projecteren, ruimtelijk redeneren, transformeren en construeren. Enkele voorbeelden staan in figuur 9. Dit zijn toetsopgaven uit de zogenoemde Pimbo-toets, die door de auteur van dit stuk in samenwerking met collega's van het Cito bij zo'n duizend basisschool-leerlingen (groep 8) in 1995 is afgenomen. Bij de opgaven zijn ook de gemiddelde goedscores (p-waarden) afgebeeld.
Iets later in de jaren 1970 werden er op het IOWO ook voor het VO nieuwe meetkundeontwerpen gemaakt. Het waren met name George Schoemaker en Aad Goddijn, die vanuit dezelfde visie als de Wiskobas-groep de *kijkmeetkunde* ontdekten. Het boekje *Schaduw en diepte* van Aad Goddijn vind ik nog altijd een van de mooiste ontwerpen uit die tijd. Het is een schoolvoorbeeld van een fenomenologische benaderingswijze van de meetkunde, hetgeen prachtig



11 **Het kleine vierkant is de helft van het grote. Niet rekenen!**

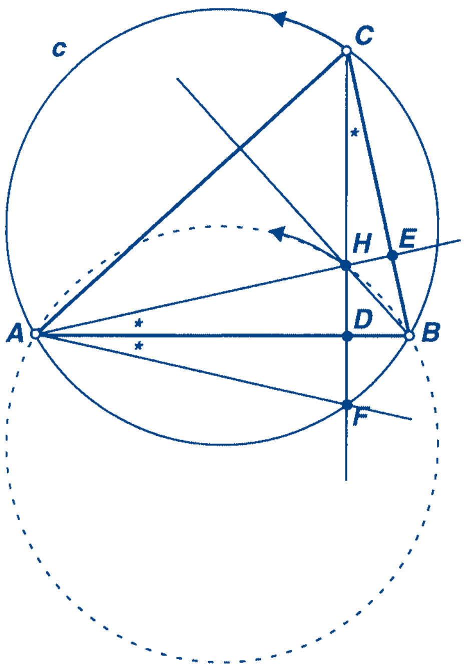
tot uiting komt in de verschijnselen van lamplicht (centrale projectie) en zonlicht (parallelprojectie). Hiermee worden de principes van invariantie van verhoudingen bij de verschillende projectiemethoden op een natuurlijke manier geïntroduceerd (zie figuur 10). Dit zijn de cruciale eigenschappen, waarmee de euclidische meetkunde gemetriseerd wordt. Later werkte Martin Kindt in de traditie van de kijkmeetkunde voort met zijn ruimtemeetkunde voor de Hewet. Tevens zien we deze opvattingen terug in zijn uitwerkingen van de projectieve meetkunde.

Gemiste kans

Met de basisvorming in de jaren 1990 deed zich de kans voor om meetkunde weer een plaats te geven in het programma. Maar de uitwerking in de schoolboeken voor de brugklas is een fletse afspiegeling van het rijke arsenaal, dat voorhanden is. Aan de formele kerndoelen wordt net voldaan zonder mogelijkheden tot niveau-differentiatie. Er bestaat een grote mate van overlap met wat op de basisschool aangeboden wordt. Soms zijn de vraagstukken van de basisschool pittiger dan die van de brugklas. In figuur 11 zien we een opgave uit een basischoolmethode, die uiteraard zonder rekenen opgelost moet worden.
Hoe zou mevrouw Ehrenfest tegen de realistische meetkunde en de kijkmeetkunde van vandaag aangekeken hebben? Wellicht tevreden over de aard en aanpak van de opgaven. Niet alleen omdat veel van haar ideeën uit de *Übungensammlung* herkenbaar zijn, maar vooral omdat er op de basisschool nu ook iets aan meetkunde gedaan wordt. Aan de andere kant zou zij wellicht kunnen opmerken dat er geen sprake is van een systematische opbouw in de eerste jaren van het VO.

Euclides' herrijzenis

De herprofilering van de tweede fase heeft Euclides in deze tijd doen herrijzen. Wolfgang Reuter en Aad Goddijn hebben hiervoor met hun publicatie *Denken in cirkels en lijnen* een voorbeeldige bijdrage geleverd. De stof omvat een aantal hoogtepunten uit de oude planimetrie. Niet de hele planimetrie als volledig systeem, maar als een verzameling problemen waaraan 'lokaal deductief' geredeneerd kan worden. Speciale aandacht wordt besteed aan de voorwaarden waaraan een logisch-deductief systeem moet voldoen en zo zien we bijvoorbeeld de middelloodlijnstelling in volle glorie terug. Interessant is dat ook de heuristische methoden in het onderwijsleerproces worden betrokken. Natuurlijk wordt daarbij anno 2000 de computer benut, waardoor een nieuwe dimensie aan het heuristische element toegevoegd wordt. Zo kunnen de vroegere problemen over 'meetkundige plaatsen' met behulp van het prachtige Cabri-programma een echt dynamisch karakter krijgen. Een bekend vraagstuk is het onderzoek naar de baan van het hoogtepunt van



12 De baan van het hoogtepunt H als C over de cirkel beweegt

een driehoek als de top de omgeschreven cirkel doorloopt (zie figuur 12). Niet alleen laat de computer de baan als in een animatiefilm verschijnen, maar het resultaat (de cirkel) kan in dit geval tot andere bewijzen dan de traditioneel bekende leiden. Als bijna vanzelf dringt zich namelijk de spiegeling ten opzichte van de basis van de driehoek op.

Tot slot

De hier geschetste globale terugblik op 100 jaar meetkundeonderwijs (voor meer, zie de literatuur bij dit artikel) is niet als een louter nostalgische herinnering bedoeld. Voor het overzien van een vakgebied moet men mijns inziens ook de historische ontstaanswijze in beschouwing nemen. Juist bij vernieuwingen kan een reflectie op het verleden uiterst zinvol zijn. Een aanpak vanuit de traditie, met respect voor datgene wat eerder verricht is, verhoogt de kans van slagen tot implementatie van de voorgestane vernieuwing. Dat dat vaak heel lang duurt, moge uit dit verhaal duidelijk geworden zijn.
In de tabel zien we nog eens het meetkundecurriculum van mevrouw Ehrenfest naast de situatie, zoals die zich nu in het onderwijs van kleuter tot eind VO voordoet. De conclusie moet zijn dat er van de pogingen, die in de 20-ste eeuw zijn ondernomen om een informele start van de meetkunde vooraf te laten gaan aan de meer formele aanpak, heel wat gerealiseerd is. Maar op een aantal punten valt er mijns inziens nog heel wat te verbeteren. De belangrijkste hiervan zijn: een betere inbedding van de meetkunde in het programma van de

Ideale opbouw mevrouw Ehrenfest
intuïtieve inleiding (10-12 jaar)
systematische cursus (12-16 jaar)
formele cursus (16-18 jaar)

Korrel

Wiskundeweek [Kruimel]

Onze literaire vrienden kennen het al: de boekenweek. Waarom hebben we eigenlijk geen wiskundeweek? Over het programma? Eenvoudig. Op woensdag wordt met het 'Bal van de Driehoek' de week geopend.
De voorzitter van de NVvW spreekt een vrolijk woord, er worden prijzen uitgereikt aan de makers van de beste lespakketten van het afgelopen jaar (de Oscars voor het wiskunde-onderwijs) en tot in de late uurtjes is het een groot feest.
Je ziet de NVvW-voorzitter al hossend door de zaal trekken, de NVvW-penningmeester met zo'n wie-zal-dat-betalen-en-weet-je-wel-wat-dat-allemaal-kost gezicht langs de kant.
Speciaal voor de wiskundeweek is er natuurlijk een minizebra of een Zebrajong geschreven. Zo'n Zebrajong krijg je cadeau als je een vijftal probleempjes oplost die je van *www.wiskundeweek.nl* hebt gehaald.
Natuurlijk zijn alle mooie activiteiten in de wiskundeweek geconcentreerd: de finales van alle A-, O-, U-lympiades, van de Kangoeroe en van al die andere wiskunde-denkwedstijden die er voorhanden zijn.
De prijsuitreikingen halen natuurlijk ook alle media.
Voor het grote publiek is er dan nog de voorspelling van de eigenschappen van de gemiddelde wiskundeleraar, de gemiddelde huisvrouw, de gemiddelde staatssecretaris of welke tot de verbeelding sprekende groep dan ook.
Het besluit van de wiskundeweek ligt natuurlijk ook vast: het jaarlijks congres van Wiskundig Nederland. Met aan het eind een receptie. Voor de gelegenheid met een bescheiden strijkorkestje.

Situatie anno 2000

informele, realistische meetkunde (4-12 jaar)

kijkmeetkunde, zwak systematische opbouw (12-16 jaar)

formeel logische aanpak (16-18 jaar, tweede fase, profiel N&T)

basisschool, verbetering van de aansluiting tussen basisschool en VO en op zijn minst een grotere van het meetkunde-aanbod in de brugklas.
Dat *meetkunde moet* komt niet alleen voort uit een persoonlijke hobby. Uit de huidige onderzoeken van de hersenfuncties blijkt dat meetkundige (visuele) en rekenkundige (logische) faculteiten zich in verschillende hersenhelften bevinden. Ook is bekend dat de ontwikkeling van deze faculteiten niet vanzelf gaan, maar dat je die hersenhelften moet activeren, onder meer door middel van onderwijs. Als we willen dat de kinderen zich zo breed mogelijk ontwikkelen dan zijn we verplicht ook aan die meetkundige faculteit van jongs af aan aandacht te besteden.

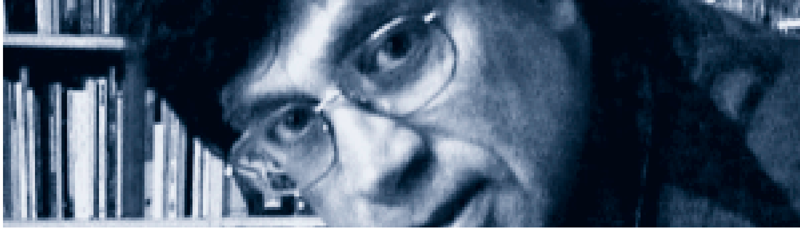
De meetkunde was dood, leve de meetkunde!

Literatuur

- Goffree, F., Van Hoorn, M. en B. Zwaneveld (red.) (2000). Honderd jaar wiskundeonderwijs. Leusden: Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
- Moor, E.W.A. de (1999). Van vormleer naar realistische meetkunde. Een historisch-didactisch onderzoek van het meetkundeonderwijs aan kinderen van vier tot veertien jaar in Nederland gedurende de negentiende en twintigste eeuw. Utrecht: Freudenthal Instituut.

Over de auteur

Ed de Moor (1933) was wiskundeleraar, opleider, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Hij werkt thans part-time bij het Freudenthal Instituut (e-mail: e.demoor@fi.uu.nl).



interview
Hans Dompeling over computeralgebra en digitaal lesmateriaal in de klas

[Henk Staal]

Hans Dompeling is sinds 1965 wiskundedocent en sinds 1974 conrector op het Murmelliusgymnasium in Alkmaar. Hij neemt deel aan het project Digitale Leeromgeving Wiskunde van APS-wiskunde. Dit betekent experimenteren met gebruik van digitaal lesmateriaal en computeralgebra in de klas. Het lesmateriaal wordt gemaakt met behulp van Studyworks. Leerlingen kunnen opgaven ook uitwerken in Studyworks en daarbij gebruik maken van de wiskundige mogelijkheden van dit pakket. Zie voor uitvoeriger informatie over het gehele project Euclides 76-5 (februari 2001), p. 204-209. Hans' collega Ton Hengeveld heeft Studyworks gebruikt in 5-vwo wiskunde A bij het onderwerp 'Populatievoorspellingsmatrices'. Leerlingen maakten daarbij opgaven uit Getal en Ruimte met Studyworks. De leerstof werd hier en daar uitgebreid met vraagstukken die wat verder gingen. Hans heeft zelf op dezelfde manier Studyworks gebruikt bij het behandelen van rijen in de groepen 5-VWO wiskunde B12 en dat in alle lessen gedurende het laatste trimester van de cursus. Eind maart woonde ik een les bij die Hans gaf aan deze groep. De groep was enthousiast over het gebruik van Studyworks. Na de les stelde ik Hans vragen over de invoering van de Tweede fase en over het werken met Studyworks.

Tot welke veranderingen heeft de invoering van de Tweede Fase geleid bij het wiskundeonderwijs op het Murmelliusgymnasium?
Qua werkvorm heeft de Tweede fase, die op onze school het vorige cursusjaar en eigenlijk voor wat betreft de wiskunde pas dit cursusjaar ingevoerd is, het wiskundeonderwijs niet erg veranderd. Wel zijn de mogelijkheden voor leerlingen beperkt. Zo zit traditiegetrouw 70% van onze leerlingen in de B-richting. Veel van deze leerlingen deden wiskunde A en dat was een uitkomst als ze met wiskunde B vastliepen. Sinds de invoering van de basisvorming is het percentage leerlingen dat succesvol wiskunde B kan doen, teruggelopen; het percentage dat N&G en N&T kiest, echter niet. De Tweede fase stelt voor deze groep wiskunde B verplicht en dat pakt rampzalig uit.

Bekijk je de boeken die in de bovenbouw gebruikt worden, dan is de verandering uiterlijke schijn: ze zijn kleuriger en omvangrijker in aantal en in formaat, maar een aanzet tot een andere didactische aanpak blijkt er niet uit.

Ik geef zélf maar een paar uren les en beperk me dit jaar in de vijfde klassen tot wiskunde B12. Ik moest me grondig voorbereiden op de Planimetrie. Hoe fraai wordt dat toch in het boek dat wij gebruiken gepresenteerd! Maar hoe rampzalig slecht, inhoudelijk gezien! Je mist structuur en heuristiek. Je haalt er niet uit hoe je een bewijs kunt opbouwen en hoe je dat kunt aanpakken. Met weemoed koester ik het boekje van Alders dat ik 35 jaar geleden gebruikte. Het toppunt van schraal- en schrielheid. Het stelde weliswaar inhoudelijk ook niet veel voor, maar gaf wél een compleet overzicht van de planimetrie en ging drie leerjaren mee! En wat geeft mij 'De schrik van Schrek' te denken met zijn Analytische meetkunde, een boek dat in het begin van de vorige eeuw uitgegeven werd en tot de zestiger jaren mee ging. Een boek dat de wiskunde in een cultureel-historische context aanbood, een boek ook van een hoog wiskundig én literair gehalte!

Ben je tevreden over de invoering van de Tweede Fase?
Nee, het had bij het promoten van het Studiehuis moeten blijven. Maar er zijn vakken bijgekomen en er zijn vakken veranderd. Bovendien hebben we praktische opdrachten en profielwerkstukken erbij gekregen. Nu moet er teveel, en alles moet tegelijk. Dat leidt tot een onwerkbare situatie. Gevolg: iedereen gestrest, leraren én leerlingen. Voor de talenmensen is de Tweede fase een ramp. Literatuur bijvoorbeeld stond bij ons in hoog aanzien. Dat wordt nu om zeep geholpen. Lezen maakt plaats voor zappen. Zo beschouwd prijs ik me als leraar wiskunde gelukkig.

Vanwaar je belangstelling voor het gebruik van computeralgebra in de klas?
Al in de jaren zeventig gebruikte ik de computer bij wiskunde. Ik programmeerde in Algol. Je kon computertijd huren om je programma te laten draaien. Dat was vrij kostbaar en zo leerde je nauwkeurig programmeren. Ik heb ook veel belangstelling voor Numerieke Wiskunde. Dat gaf ik als keuze onderwerp bij wiskunde 2. We gebruikten daarbij programmeerbare rekenmachines. Het ging vooral om de vraag: hoe krijg je met niet-exact-rekenende apparatuur grip op de materie? Met computeralgebra kun je heel wat zaken wél exact uitwerken, als je tenminste bepaalde klippen kunt omzeilen. Je kunt namelijk vaak voorbeelden vinden waarop het programma stuk loopt. Blind vertrouwen kun je niet hebben, maar verder wordt je veel rekenwerk uit handen genomen. In het onderwijs blijft het aanleren van goede concepten van wiskundige begrippen nodig. Als je computeralgebra gebruikt, heb je daar in principe meer tijd voor. De uitdaging is dus om met computeralgebra te komen tot een verdieping van de wiskundige begrippen.

Welke conclusies trek je uit je ervaringen die je tot nu toe hebt opgedaan?
Eerst de ervaringen met het Studyworks-project in 5 vwo wiskunde A. De leerstof die het boek aanbood, kon dank zij Studyworks goed verwerkt worden. We wilden echter méér: we hebben een verband gelegd tussen populatievoorspellingsmatrices en exponentiële functies. Leerlingen moesten leren om zelf correcte formules en functievoorschriften op te stellen. Dat is maar ten dele gelukt. De vraag is echter of we hiervoor niet meer tijd hadden moeten inruimen en bovendien of de door ons gewenste verdieping wel past in het kader van de wiskunde A.

Zélf heb ik me met ingang van maart 2001 gestort op het project ‘Rijen’. De leerstof wordt via Studyworks aangeboden en verwerkt, digitaal dus en tevens heel dynamisch.
Ik was door de planimetrieleerstof heen en moest een nieuw onderwerp aansnijden. Tengevolge van een foutieve planning beschikte ik echter niet over een leerboek en, omdat ik als beheerder van het Boekenfonds tussentijdse aanschaf van boeken verboden had, moest ik het zonder leerboek stellen. Studyworks stelde me gelukkig in staat de leerstof in heel korte tijd aan te maken. Elke les verwerken de leerlingen de materie met de computer, thuis doen ze het nog eens dunnetjes over aan de hand van een hardcopy. De eerste lessen maken het direct duidelijk: leerlingen worstelen met concepten van recursiviteit, van som- en verschilrijen en het zich eigen maken ervan is een kwestie van intellectueel denken en actief handelen. In de gekozen werkwijze komt dat het beste tot z’n recht.

Bij de Planimetrie wilde ik het leerboek op twee punten aanvullen: de hiërarchische structuur in het onderwerp ‘Bewijzen en redeneren’ en de heuristiek. Hierbij ging ik als een missionaris te werk (‘Leer en bekeer, je zult daarna beloond worden.’) en hield veel klassengesprekken om de leerlingen op het spoor van een ontdekking te zetten.
Pas bij ‘Constructies’ werden de leerlingen in een digitale leeromgeving geplaatst, waarbij intensief met het programma Cabri werd gewerkt.

Wat vind je van Studyworks in vergelijking tot pakketten als Maple, Derive, TI-interactive?
TI-interactive ken ik onvoldoende. Dat programma laat ik dus buiten beschouwing. Midden jaren negentig liet ik de eindexamenklas als extraatje wel eens examensommen met Derive maken. Je demonstreerde dan dat die vraagstukken van een inferieur gehalte waren, omdat de computer ze kon oplossen. ’t Kostte echter erg veel tijd om Derive te introduceren en ik slaagde er niet in het programma in de gewone les te integreren. Windowsversies van Maple en Derive, die ik in dit kader als gelijkwaardig beschouw, zijn met teveel wiskunde opgetuigd, voor de leerlingen althans. Dat bezwaar geldt niet voor Studyworks. Dat programma biedt eerder te weinig dan te veel, maar je kunt er direct mee aan de slag. Zeker als je met de voortreffelijke, door APS-wiskunde samengestelde, digitale handleiding begint.
Het grote voordeel van Studyworks is echter dat je het in je lessen kunt integreren, op voorwaarde dat je over voldoende computers beschikt. Het programma biedt wiskunde in één (digitale) omgeving aan, waarin je de leerstof dynamisch aangeboden krijgt én kunt verwerken. Die omgeving kan bovendien verruimd en verrijkt worden met Kennisnetkringen.

Verwacht je dat dit soort pakketten een belangrijke rol gaan spelen in het wiskundeonderwijs in het voortgezet onderwijs?
Ja, en de digitalisering wordt bespoedigd als:
1 Kennisnet zich succesvol ontwikkelt. Kennisnet biedt nu al veel, maar in onze regio is er (letterlijk) een kink in de kabel, want we hebben geen snelle internetverbinding via de kabel.
2 Iedere leerling op z’n twaalfde een laptop krijgt met alles d’r op en d’r aan en d’r in (kosten: 1000 gulden per leerling, grotendeels te bekostigen door forse besparingen op leermiddelengelden).

Wat zijn je verdere plannen voor gebruik van computeralgebra en digitale leeromgevingen in de klas?
Ik hoop binnen afzienbare tijd directietaken te kunnen afstoten en meer tijd te besteden aan het lesgeven in de bovenbouw. Zoveel mogelijk wil ik de leerlingen laten werken in een digitale leeromgeving. De mate waarin dat lukt zal afhangen van allerlei randvoorwaarden, waarvan ik hierboven er enkele genoemd heb.
Ik blijf echter een ouderwetse schoolmeester die graag wil uitleggen en demonstreren. M’n lusten kan ik echter botvieren in het vervaardigen van digitale presentaties, waarvan er enkele vanaf onze website (*http://www.murmellius.nl*) te downloaden zijn.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Jaarvergadering/ Studiedag 2001

[Marianne Lambriex]

Eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 2001 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op
zaterdag 17 november 2001
in het gebouw van Hogeschool Domstad, Utrecht

Aanvang: 10:00 uur
Sluiting: 16:00 uur

Themagedeelte 'Wiskunde buiten je boekje'

Na het geslaagde jubileumcongres met als thema 'Wiskunde over de ...grenzen' waarbij we over de lands-, tijds- en vakgrenzen hebben gekeken, willen we nu buiten de grenzen van ons boek gaan, ons boekje te buiten gaan.
Als je buitenlandse collega's die zich verdiept hebben in ons wiskundeonderwijs, vraagt wat ze het meeste opvalt, krijg je steevast een antwoord waarin ze hun verbazing schetsten over onze boekafhankelijkheid. En dan geven ze voorbeelden als:

- de les kan niet beginnen als de boeken niet op tafel liggen;
- als een leerling zijn boek vergeten is, volgt er een strafmaatregel;
- docenten kunnen geen lesgeven als er nog geen boeken zijn;
- het boek wordt strikt gevolgd;
- het boek is de bindende factor tussen leerling en docent.

En als we eerlijk zijn, is dit wel een treffende constatering.

Vandaar het motto van de studiedag. Er zal tijdens de studiedag vooral aandacht besteed worden aan praktijkvoorbeelden die laten zien hoe andere werkvormen dan de boekafhankelijke, boekinhouden kunnen vervangen.
Ook onderzoeken we boekvervangende hulpmiddelen, zoals computerprogramma's, applets en internetlessen. En vervolgens is er een heel scala van aanvullingen op het leerboek, zoals onze Zebraboekjes. Speciale aandacht krijgen groepen leerlingen, bijvoorbeeld I-leerlingen, voor wie boeken nog niet geschreven zijn of voor wie boeken vaak te veel zijn.

Oproep 1

Omdat er onder onze leden al veel eigen werk is dat het boek te buiten gaat, vervangt of aanvult, proberen we een uitwisseling op gang te brengen.
Daarom vragen we u voorbeelden van eigen werk, zoals PO's, profielwerkstukken, sectorwerkstukken met leerlingenuitwerkingen, mee te nemen en beschikbaar te stellen aan collega's.

Agenda

Huishoudelijk gedeelte

1 Opening door de voorzitter, drs. M. Kollenveld
2 Jaarrede door de voorzitter
3 Notulen van de jaarvergadering 2000
4 Jaarverslagen (zie een volgend nummer van Euclides)
5 Decharge van de penningmeester, vaststelling van de contributie 2001-2002 en benoeming van een nieuwe kascommissie
6 Bestuursverkiezing en -overdracht

Studiedag:

'Wiskunde buiten je boekje'

Vervolg huishoudelijk gedeelte

7 Rondvraag
8 Sluiting

Bovengenoemde aspecten vallen alle binnen het curriculum, maar echt je boekje te buiten gaan, betekent ook buiten dat curriculum durven te gaan. Ook hiervan willen we u lespraktijken laten zien.
Verder komen er ook werkgroepen die handelen over het beoogde resultaat van onze boekenwijsheid: een goed doorlopen examen(dossier). Tevens komen de nieuwste ontwikkelingen binnen het wiskundeonderwijs aan de orde.

Oproep 2

Het is vaak bijzonder inspirerend om kennis te maken met praktijkvoorbeelden van collega's. Vandaar de oproep om, als u een werkgroep zou willen leiden die past bij dit thema, contact op te nemen met Marianne Lambriex (e-mail: *m.lambriex@nvvw.nl*).

In het volgende nummer van Euclides kunt u gedetailleerd lezen wat u kunt verwachten op **17 november 2001**.

COMMISSIE MODERNISERING LEERPLAN WISKUNDE

De staatssecretaris van onderwijs, kunsten en wetenschappen G. C. Stubenrouch heeft bij beschikking van 12 juni 1961, nr 157009 III, hoofdafd. V.H.M.O., ingesteld een commissie, die tot taak zal hebben de modernisering van het wiskunde-onderwijs bij het voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs in studie te nemen (Commissie modernisering leerplan wiskunde) en in verband met deze doelstelling onder meer van advies te dienen inzake

1e. de problemen met betrekking tot de onderwerpen, met welker behandeling in een aantal scholen zou kunnen worden geëxperimenteerd onder leiding van bepaalde aan te wijzen instituten, met inbegrip van de wijzigingen in het leerplan, die met deze experimenten zullen moeten samengaan, en van de daaraan verbonden consequenties voor de eindexamens van deze scholen;

2e. de maatregelen, die genomen kunnen worden om de oudere in functie zijnde leraren in de gelegenheid te stellen zich te oriënteren ten aanzien van de nieuwere ontwikkelingen in de wiskunde;

3e. het probleem of en, zo ja, op welke wijze een programma zou moeten worden samengesteld voor het wiskunde-onderwijs, te geven aan die leerlingen, die beschikken over een bijzondere aanleg voor wiskunde en voor wie specialisatie in deze richting wenselijk is, mede met het oog op de internationale positie van Nederland.

In deze commissie zijn benoemd:

tot lid en voorzitter: prof. H. Th. M. Leeman te Amsterdam;

tot leden: C. J. Alders te Haarlem, prof. dr F. van der Blij te Bilthoven, H. G. Brinkman te Groningen, dr L. N. H. Bunt te Utrecht, prof. dr H. Freudenthal te Utrecht, prof. dr J. C. H. Gerretsen te Groningen, dr H. A. Gribnau te Haarlem, prof. dr A. Heyting te Amsterdam, prof. dr N. H. Kuiper te Bennekom, prof. dr F. Loonstra te 's-Gravenhage, prof. dr P. Mullender te Amstelveen, dr D. N. van der Neut te Zeist, prof. dr J. J. Seidel te Eindhoven, dr H. Streefkerk te Zeist, prof. dr C. Visser te Voorschoten, dr P. G. J. Vredenduin te Arnhem;

tot lid en secretaris: dr A. F. Monna te 's-Gravenhage.

Mededeling in Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 48 (1960-1961)

Daar zit ik dan weer in het cybercafé aan Las Ramblas in Barcelona, vlakbij de kennelijk aan Pi gewijde kathedraal. Weg van het werk en toch via internet met mijn cursisten verbonden. En ik schrijf dit tweede deel van mijn artikel over de inzet van de elektronische leeromgeving Blackboard bij de cursus vakdidactiek wiskunde aan het ICLON, de universitaire leraren opleiding in Leiden. In het eerste deel [1] ging ik vooral in op het gebruik, via de verschillende knoppen. Op een van de knoppen beloofde ik nog terug te komen, het Control Panel, dat doe ik zo eerst. Daarna staan mijn cursisten centraal en hun en mijn ervaringen met Blackboard. Tot slot kom ik toe aan de hamvraag: is een elektronische leeromgeving misschien ook iets voor het Voortgezet Onderwijs?



Vakdidactiek in Cyberspace, deel 2

[Hans Wisbrun]

De beste manier om, als lezer van dit artikel, een kijkje in de keuken van vakdidactiek wiskunde te nemen is natuurlijk door zelf het internet op te gaan. De URL is http://blackboard.leidenuniv.nl/courses/vdw2000 en u kunt tijdelijk (!) naar binnen met als 'User Name' razend en als 'Password' nieuwsgierig. Alleen kijken, niet aankomen, alstublieft!

Control Panel

Via het Control Panel kan ik op afstand mijn cursus beheren (zie figuur 1). Ik kan opdrachten maken en wijzigen en berichten en documenten plaatsen. Ik kan cursisten inschrijven, groepen samenstellen, e-mails aan geselecteerde groepen of individuele gebruikers versturen. Ik kan bepalen welke delen voor wie toegankelijk zijn. Ik kan ook heel beperkt iets aan de vormgeving doen. Bovendien kan ik mijn cursisten als een soort Big Brother in de gaten houden. Hoe vaak doen ze het, wat doen ze, en wanneer doen ze het? Er blijkt zelfs om 4 uur 's nachts nog op het Blackboard gewerkt te worden (zie figuur 2). Vermoedelijk om redenen van privacy zijn sommige van die gegevens bij ons op het ICLON niet per persoon beschikbaar, al kent Blackboard die mogelijkheid wel. Dit soort statistische gegevens zijn natuurlijk maar een kleine bijdrage aan de begeleiding en beoordeling van mijn cursisten. Maar als een cursist een tijd niet op Blackboard verschijnt - dat kan ik wel per persoon bijhouden - kan ik ingrijpen. Het is voor een cursist nu een stuk lastiger geworden zich in of achter een groep te verschuilen; het hele proces kan gevolgd worden. Van een groepsopdracht heb ik achteraf niet alleen de

eindproducten tot mijn beschikking, maar ook de tussenproducten en de hele discussie daar tussen in.

Cursisten en hun deelname

Het lijkt me zinnig om, bij wijze van intermezzo, even een schets te geven van wie er, behalve ikzelf, aan de knoppen komen, te weten mijn cursisten. Je kunt toegelaten worden tot de universitaire lerarenopleiding wiskunde op het ICLON als je een hoger onderwijs diploma in de wiskunde hebt, of zo'n diploma in een 'aanverwant vak' bezit en je voldoende wiskunde-kennis op universitair niveau in huis hebt. Een paar jaar terug waren dat bijna allemaal mensen met een doctoraal wiskunde, die daar nog een postdoctoraal jaar voor de lerarenopleiding aan vastplakten. Deze stroom is echter niet meer zo breed als voorheen, om het eufemistisch uit te drukken, niet alleen hier maar ook bij andere universiteiten. Gelukkig zijn er ook nog andere wegen om binnen te komen. Je kunt bijvoorbeeld als tweedegrader hier in drie jaar je eerstegraads bevoegdheid halen, via de zogenoemde DAV1-opleiding. Het afgelopen jaar hebben ook veel 'zij-instromers' bij ons aangeklopt. Dat zijn mensen met een heel andere achtergrond, bijvoorbeeld het bedrijfsleven, die vaak op latere leeftijd besluiten om leraar te worden. Voor hen gelden dezelfde toelatings-eisen als voor ieder ander, maar zij kunnen soms wat vrijstellingen krijgen binnen de opleiding, op grond van wat heel chique 'Elders Verworven Competenties' is gaan heten. Heeft men nog niet voldoende wiskundekennis in huis, dan moet eerst een 'insluisprogramma' wiskunde gevolgd worden. Zo zitten er bij mij momenteel cursisten uit de IT-wereld, uit de mathematische psychologie, uit het actuariaat, uit de elektrotechniek, uit Wageningen.

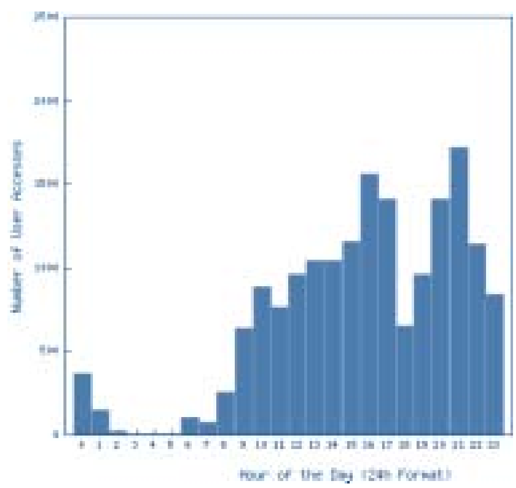
Wat die verschillende categorieën gemeen bleken te hebben: ze kunnen goed met Blackboard overweg, ook al hebben ze daarin nauwelijks training gehad. Mijn collega geschiedenis had mij van te voren toevertrouwd dat er bij hem nog wel eens het een en ander misging omdat sommige cursisten Blackboard gebrekkig wisten te bedienen. Daar heb ik bij mijn cursus niets van gemerkt. Ook ongein, waarmee discussies bij hem soms werden vervuild, komt bij mij niet voor. Er wordt serieus gewerkt en aan de bijbehorende regeltjes (bijvoorbeeld over de naam-geving van bestanden die men opstuurt) houdt men zich over het algemeen goed. Is het misschien de duidelijke structuur van Blackboard waardoor exact-geschoolden er weinig moeite mee hebben?

Ook de deelname is, zowel in kwantitatief als kwalitatief opzicht, goed. Zoals ik in deel 1 schreef: er zijn met ongeveer 20 ingeschrevenen binnen een half jaar meer dan 15000 'accesses' geteld. De positieve reacties op Blackboard van mijn cursisten maakten mij enthousiast, waardoor ik nog meer mijn best ging doen er iets van te maken, waardoor mijn cursisten weer enthousiaster werden, enzovoort. Of dat mij zelf veel extra tijd heeft gekost, daarop kom ik later terug. Wel wil ik hier al het volgende kwijt. Als je als docent Blackboard inzet, dan moet je het ook goed doen. Lege of slecht-onderhouden Blackboardsites werken alleen

1



2



maar demotiverend. Iedereen, docent en cursisten, doet het altijd, zou het motto moeten zijn. Nou ja: drie keer in de week dan.

Doelgerichtheid en doelmatigheid

Effectiviteit en efficiëntie, dat zijn in een zakelijker geworden onderwijswereld toch de begrippen waar alles uiteindelijk tegen afgezet wordt. Bereik ik mijn doelen (leren dus) en bereik ik die met zo weinig mogelijk inzet van middelen (tijd = geld)? Wat dat eerste betreft luidt het antwoord: ja. Met de huidige constructie waarbij er zowel bijeenkomsten zijn als Blackboardactiviteiten, heb ik de lat zelfs hoger kunnen leggen. Ik heb de indruk dat er beter gewerkt wordt en dat er meer bereikt wordt dan zonder de inzet van Blackboard. Cursisten leren bijvoorbeeld meer van elkaar, er is meer contact. Een raar bijeffect: ik denk mijn cursisten nu ook beter te kennen, ik ‘zie’ ze bijna dagelijks, individueel en als lid van een groep.

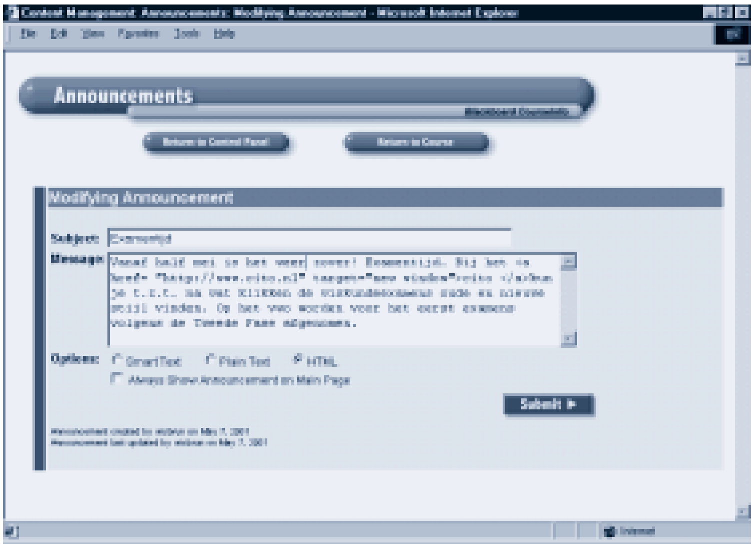
Recentelijk is er een interne evaluatie gehouden, onder andere via een enquête onder de gebruikers, over de inzet van Blackboard bij een aantal cursussen vakdidactiek op het ICLON [2]. Met de resultaten voor vakdidactiek wiskunde kon ik dik tevreden zijn: maar liefst 90% van de cursisten gaf aan dat Blackboard
een goed middel was om informatie over de studietaak te krijgen;
goed gefunctioneerd heeft als communicatiemiddel;
goed gewerkt heeft als middel om feedback te geven en ontvangen.
Met name dat laatste is opvallend, omdat ik me hierin zelf bewust wat terughoudend heb opgesteld. Ze krijgen dus kennelijk voldoende feedback van elkaar. Samenvattend: de inzet van Blackboard heeft duidelijk een positief effect gehad.

Tijdsfactor en efficiëntie

Hoe zit het met de factor tijd? Cursisten zijn, naar ik inschat, nu ongeveer evenveel tijd aan het leren kwijt als er nominaal voor staat. Voor vakdidactiek wiskunde staan bijvoorbeeld 200 uren, waarvan er zo’n 50 uur voor de fysieke bijeenkomsten zijn. De 150 uur voor ‘huiswerk’ worden er nu ook echt ingestoken, er is gewoon geen ontsnappen meer aan. Er valt een enkele bijeenkomst uit en dat scheelt reistijd voor mensen die van ver komen en geen andere bijeenkomsten op het ICLON hebben. De bijeenkomsten kunnen nu ook wat korter: informatie geven is minder nodig (dankzij de knoppen Announcements, Course Information, Course Documents en Assignments) en cursisten komen inhoudelijk beter beslagen ten ijs. Mijn cursisten pikten de techniek redelijk snel op, dus daar waren ze niet veel tijd mee kwijt. Misschien dat een enkeling die geen goede internetverbinding had relatief veel tijd kwijt was met domweg wachten, maar ik heb hier zelf nooit klachten over gehoord. Kennelijk beschikken de meeste van mijn cursisten thuis of op hun school over goede verbindingen. Wel vond men de navigatie binnen Blackboard niet altijd even handig.

Hoeveel tijd was ik er zelf aan kwijt? Het antwoord is van belang voor de lezers die er nu over denken zelf een Blackboardsite in te gaan richten. Voor de start

3



4



van het nieuwe cursusjaar ben ik er twee dagen echt voor gaan zitten, met een technisch expert naast me. Een deel van het denkwerk - er moet bijvoorbeeld goed nagedacht worden over het 'didactisch concept' - hoefde ik gelukkig niet meer te doen. Ik had geleerd van de successen en mislukkingen van mijn voorgangers op het ICLON. In het begin, toen de cursus eenmaal draaide, was ik er veel tijd mee kwijt. Niet omdat het nodig was, maar omdat ik door het medium gefascineerd raakte en er alles uit wilde halen wat erin zat. Blackboard is heel eenvoudig in de bediening, maar als je een klein beetje van HTML weet, ziet het er allemaal net iets mooier uit **(zie figuur 3)**. Toen ik me erop betrapte dat ik ook veel 's avonds thuis aan Blackboard zat te werken en ik daarvoor ook geen vergoeding voor telefoonkosten bleek te krijgen, heb ik een tandje terug geschakeld. Nu, na een dik half jaar, stop ik er net iets meer in dan er aan docententijd voor staat. En volgend cursusjaar, als ik veel kan hergebruiken, denk ik dat ik quitte kan spelen.

Kan het nog efficiënter? De tijd die je er als docent in steekt bestaat uit twee delen: een portie per cursist en een portie overhead voor het bedenken, inrichten en onderhouden. Die overhead ben je kwijt of er nu een paar cursisten meedoen of tientallen. Stromen er meer mensen naar de ICLON-lerarenopleiding voor wiskunde dan blijft de overhead hetzelfde. Hoe meer studenten, hoe efficiënter. Ik wil nog wel een stapje verder gaan, al weet ik niet of mijn collega-vakdidactici op andere universiteiten dit idee zullen omarmen. Waarom niet alle vakdidactiek wiskunde op alle universiteiten aanbieden via dezelfde Blackboardsite? De bijeenkomsten blijven dan wel gespreid over de verschillende universiteiten, maar wat in cyberspace kan worden gedaan, wordt gecentraliseerd. Of je draait overal lokale varianten op een al ingerichte Blackboardsite waarvan je het 'didactisch concept' onderschrijft. Een Blackboardsite kan namelijk in zijn geheel gekopieerd worden.

Hamvraag

Is het wat voor u? Is het wat voor het Voortgezet Onderwijs? Teleleeromgevingen of elektronische leeromgevingen worden wel in het hoger onderwijs gebruikt, maar nog niet zo veel in het VO. De zogenoemde kringen op Kennisnet (*http://kringen.kennisnet.nl*) werken overigens wel met Blackboard en het gebruik ervan is daar gratis. Binnen twee minuten had ik er zelf een kring opgericht **(zie figuur 4)**, dus dat moet u ook lukken.

Ik hoor regelmatig de klacht dat er in de Tweede fase voor wiskunde zo weinig contacturen zijn. Is Blackboard niet een manier om toch wat meer sturing te geven aan dat beoogde zelfstandig leren? Als ondersteuning bij uw gewone lessen? En zou het niet een middel kunnen zijn om het maken van praktische opdrachten of profielwerkstukken in een begeleidend kader te plaatsen? Het bespaart u en uw leerlingen in ieder geval veel voortgangsgesprekken, met alle agendaproblemen van dien. Blackboard zou ook gebruikt kunnen worden voor de communicatie tussen uw leerlingen onderling bij het gezamenlijk werken aan een PO. Maar misschien is dat wat kunstmatig. Uw leerlingen zien elkaar waarschijnlijk vaker dan mijn cursisten elkaar zien. Of heb ik daar overdreven voorstellingen van? Verder heb ik weet van twee wiskundedocenten die een zebrablok (Iteratie en Chaos) met Blackboard gaan begeleiden, als een aansluitingsmodule voor vwo-leerlingen. Dus daar liggen kennelijk ook mogelijkheden. Daarnaast staat het werken met ICT gewoon in de eindtermen van de Tweede fase. Dat hoeft bij wiskunde niet beperkt te blijven tot de grafische rekenmachine en (wiskunde)-software. Sterker nog: ik denk dat de vaardigheid om met een teleleeromgeving om te gaan voor veel leerlingen, met name voor degenen die niet verder gaan in een bètastudie, een hogere 'transferwaarde' heeft voor een vervolgstudie en het dagelijks leven.

Wat ik u wel aanraad als u iets gaat opzetten: werk nooit in uw eentje. Doe het altijd met collega's op school. Of doe het met collega's die op eenzelfde lijn als u zitten, maar op een andere school werken. Afstand is bij teleleeromgevingen immers geen probleem. Je kunt met verscheidene docenten aan een site werken zonder elkaar ook maar een keer te zien. En verder is het misschien verstandig om eerst eens een experiment te doen met leerlingen voor wie ICT vertrouwd is en die daar ook lol in hebben. Ik geef u op een briefje dat er dan heel wat van hen zullen zijn die Blackboard nog makkelijker oppikken dan uzelf.

In ieder geval liggen er mogelijkheden genoeg voor wat experimenten, zeker nu scholen via Kennisnet gratis gebruik kunnen maken van Blackboard.
Wilt u na het lezen van dit artikel meer weten over teleleren in het algemeen of over Blackboard in het bijzonder? Aarzel niet: *wisbrun@iclon.leidenuniv.nl*

Noten

[1] Het eerste deel van dit artikel is verschenen in Euclides 76-7 (mei 2001), p. 264-268.

[2] Aletta Smits, Evaluatie: Teleleren met Blackboard (pilots), ICLON, Leiden (interne publicatie).

Over de auteur

Hans Wisbrun (e-mail: wisbrun@iclon.leidenuniv.nl) is vakdidacticus wiskunde aan het ICLON, Universiteit Leiden.

Praktische opdrachten in het vmbo: Werken met een startpapier en een stappenplan

[Anders Vink]

Volgens de nieuwe examenprogramma's in het vmbo zijn Geïntegreerde Wiskundige Activiteiten (GWA) een verplicht onderdeel in het schoolexamen wiskunde. Alle methoden leveren in hun nieuwe vmbo-boeken materiaal daarvoor. Soms in de vorm van Praktische Opdrachten, soms worden expliciet GWA's aangeboden [1].

Organisatie

Bij het laten uitvoeren van praktische opdrachten door leerlingen is het belangrijk dat leerlingen een goed idee hebben van wat er van hen wordt verwacht. Er is dus meer nodig dan een goed geformuleerde opdracht: er moet ook aan de organisatie van de opdracht worden gedacht.

In de loop der jaren is er in het vmbo steeds meer ervaring opgedaan met hoe je leerlingen aan praktische opdrachten kunt laten werken. Aan de ene kant is er behoefte aan structuur en duidelijkheid. Aan de andere kant is het uitvoeren van een praktische opdracht meer dan het maken van een rijtje sommetjes: met enige vrijheid kunnen leerlingen, ook (of: juist?) in het vmbo, tot verrassend mooie producten komen.

Startpapier

Een 'startpapier' helpt. Zo'n startpapier bevat de opdracht en geeft leerlingen instructie hoe ze met de opdracht om moeten gaan, welke eisen worden gesteld, wat mag en wat moet.
De instructie moet uiteraard zo volledig mogelijk zijn; het maken van de instructie geeft de docent ook gelegenheid om een aantal zaken te overdenken:

WAT is de opdracht?
Een heldere formulering van de opdracht.
HOE moet de opdracht aangepakt worden?
Wordt er alleen gewerkt, in tweetallen of in grotere groepen? Is de computer beschikbaar?
Waar is HULP te krijgen?
Is er lestijd beschikbaar om de docent te raadplegen, mogen andere leerlingen worden ingeschakeld? Moeten tussenstappen aan de docent worden getoond?
Hoeveel TIJD is er beschikbaar?
In de les? Buiten de les?
Wat is de UITKOMST van de opdracht?
Werkstuk? Welke extra eisen worden daar aan gesteld? Of moet er een poster worden gemaakt? Moet er mondeling toelichting worden gegeven? Hoe wordt er beoordeeld?
Wat als je KLAAR bent?
Zijn er aanvullende opdrachten voor snelle of goede leerlingen?

Stappenplan

Voor de aanpak van de opdracht (HOE in het bovenstaande rijtje) zijn er inmiddels goede ervaringen met een stappenplan. In een stappenplan geeft de docent gestructureerd aan wat er van de leerling verwacht wordt. Afhankelijk van de leerlingen waarmee gewerkt wordt en afhankelijk van de smaak van de docent kan een stappenplan meer open of meer gesloten gemaakt worden.
Zo'n stappenplan geeft de docent de mogelijkheid tussentijds de vinger aan de pols te houden. Ook kan ermee tussentijds beoordeeld worden.

Een voorbeeld

Als illustratie van het voorstaande volgt hieronder en op de volgende pagina een startpapier en een stappenplan [2] rond de opdracht 'Vlakvullingen à la Escher'.

EEN ESCHER-ACHTIGE VLAKVULLING MAKEN

WAT
Je gaat aan de hand van het onderstaande STAPPENPLAN een Escher-achtige tekening maken.

HOE
Je werkt in tweetallen. Benodigde spullen als transparant en stiften krijg je van de docent. Let op: per tweetal krijg je twee transparanten. Eén om te oefenen en één voor de in te leveren opdracht.

HULP
Je probeert er met z'n tweeën uit te komen. Als dat echt niet lukt haal je de docent er bij.

TIJD
Je krijgt één les, waarin deze instructie wordt behandeld. De volgende les heb je nog een half uur om, als dat nodig is, jullie tekening af te maken. Eventueel kun je er samen tussen de eerste en de tweede les door aan werken.

UITKOMST
Uiterlijk aan het einde van de tweede les lever je het transparant in. Aan sommige leerlingen wordt gevraagd hun tekening even kort toe te lichten: welke stappen zijn gedaan? Was het moeilijk? Enzovoort.
Bij de beoordeling wordt gelet op: mooie tekeningen,

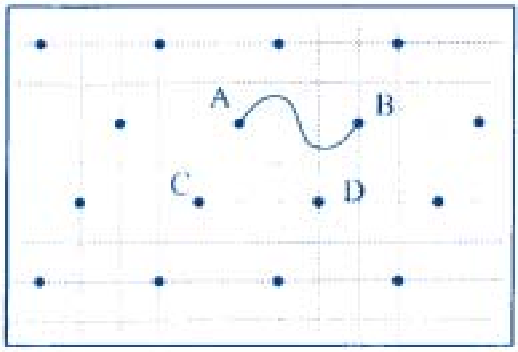
originele figuren, netjes gewerkt, binnen de tijd afgemaakt.

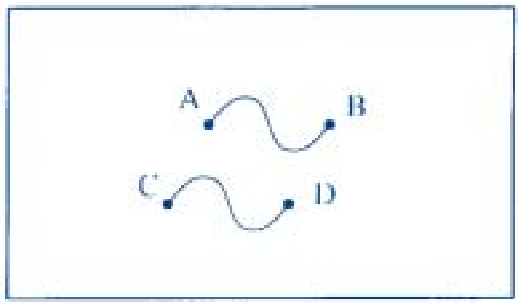
KLAAR

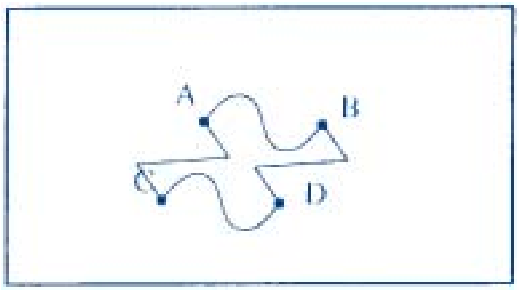
Als je in de tweede les al eerder klaar bent, mag je vast doorwerken aan het huiswerk voor de volgende les.

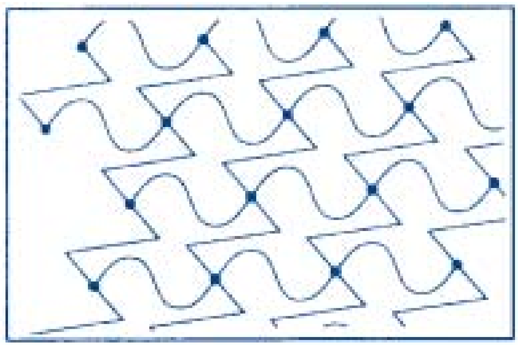
STAPPENPLAN

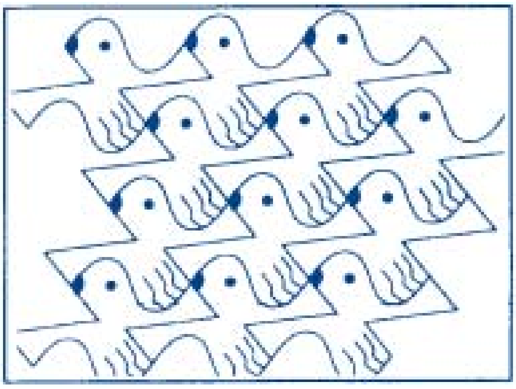
Je hebt nodig: een ruitjesvel, wat stiften, een gewone transparant en een klein transparantje.
Teken op het ruitjesvel een patroon van punten.
Geef vier punten die samen een parallellogram vormen, de letters A, B, C en D.
Teken een frutsel tussen A en B.
Je hebt nu zoiets als in *figuur 1*. Maar misschien is jouw frutsel leuker!
Trek het frutsel en de punten ABCD over met een stift op het kleine transparantje. Door het transparantje te verschuiven kun je jouw frutsel ook tussen C en D tekenen. *Zie figuur 2*.
Maak op dezelfde manier zijden AC en BD. Verzin daarvoor weer een aardig frutseltje. Het kleine transparantje is nu een soort stempel geworden.
Zie figuur 3.
Leg het kleine transparantje onder het grote transparant.
Maak met je stempel een vlakvulling op het grote transparant.
Zie figuur 4.
Maak de vlakvulling mooi, door te kleuren, of ogen en zo te tekenen.
Zie figuur 5.

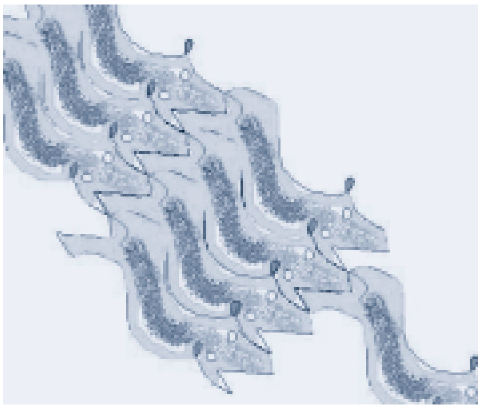














Een variant

Bij een andere instructie kan de opdracht heel anders worden. Zo is *figuur 6* het resultaat van werken met het computerprogramma 'Paint' [3].
Kunt u een instructie maken waarbij dit programma wordt gebruikt?

Ten slotte

De Escher-opdracht wordt gebruikt bij de cursus 'GWA en Praktische opdrachten in het vmbo' van APS-wiskunde. Inmiddels zijn varianten op deze opdracht (onder andere met behulp van Paint) uitgeprobeerd op verschillende vmbo-scholen, in klas 1 tot en met 3. En zoals bijvoorbeeld blijkt uit het leerlingenwerk in *figuur 7*: met veel succes!

Noten

[1]
Formeel gezien is GWA een leerstofaanduiding, en een praktische opdracht een toetsvorm. Maar het ligt voor de hand om GWA met een praktische opdracht te toetsen. Vandaar dat deze uitdrukkingen door elkaar worden gebruikt.

[2]
Dit stappenplan is een bewerking van de bladzijden 16 en 17 van het VIERKANT-doe boekje 'Zelf Escher-achtige vlakvullingen ontwerpen' van A. Kolkman en M. Pijls (boekje nummer 17).
Informatie over VIERKANT is te vinden op http://www.vierkantvoorwiskunde.nl

[3]
Paint is onderdeel van Windows en op iedere pc te vinden onder 'Bureauaccessoires'.

Over de auteur
Anders Vink (e-mail: a.vink@aps.nl) is werkzaam bij APS-wiskunde.

Praktische Opdrachten voor wiskunde in 5-vwo

[Marianne Lambriex-van der Heijden, [1]]

Stralend staat Elke voor me, helemaal opgewonden van enthousiasme, haar ogen lachen. We staan aan de balie van de mediatheek en ze wil me persé laten delen in haar nieuw verworven inzichten in Fuga nr.22 in bes mineur van Johann Sebastian Bach. Ook de bibliothecaresse geniet van Elke's enthousiasme en is nieuwsgierig voor welk vak ze zo bezeten bezig is en is zeer verbaasd als ze hoort dat het voor wiskunde is.

Dit tafereel speelde zich december j.l. af in de mediatheek van het Stedelijk College Eindhoven (SCE). Elke is een leerling uit 5-VWO, met profiel NT en was bezig met de Praktische Opdracht voor het vak wiskunde.
Het SCE is een zeer brede scholengemeenschap van V(M)BO tot en met VWO-gymnasium (ook tweetalig) met een ISK (opvang nieuwkomers) en een ISSE (Engelstalige internationale school). Het SCE startte in 1998 met de Tweede Fase voor het VWO. Ook is het SCE een voorhoedeschool in het ICT-plan van het ministerie, of wat daar van over is, en de mediatheek van de bovenbouw speelt hierin voor het studiehuis een belangrijke rol. Dat blijkt onder meer uit de permanente 'bemensing'; er is gedurende 25 uur per week een bibliothecaresse van de Openbare Bibliotheek en voortdurend een toezichthouder aanwezig, een banenpooler met heel veel IT-vaardigheden. Bovendien surveilleert er elk lesuur een docent en, indien rooster-technisch mogelijk, twee. Ook is er de nodige hardware aanwezig: 30 netwerk-pc's gegroepeerd in twee ruimten, video- en audioapparatuur en natuurlijk een hoeveelheid boeken.
De mediatheek is het hart van het Studiehuis en ligt ook fysiek in het centrum van de school, met direct aangrenzend een studieruimte, een stiltelokaal en groepsruimte, en de vaklokalen.

Ton, de toezichthouder van de mediatheek, komt mij op mijn werkplek opzoeken. Hij ziet er een beetje boos uit, want hij had een aantal van mijn leerlingen aangesproken op het feit dat ze zich niet aan de regels van het gebruik van internet hielden. Althans dat dacht hij, omdat ze muziek zaten op te nemen (en afspeelden). Weer anderen waren een of ander kansspelletje aan het doen of waren koophuizen aan het bekijken. Allen konden aantonen door het tonen van hun 'internetkaart' dat ze bezig waren voor hun PO-wiskunde: de een met 'Muzikale Exponenten' en de andere met 'Het Drie Deuren Probleem' of 'Huren of Kopen?'.
'Of dat waar was en wat hij nog meer kon verwachten.'

De studiehuisgedachte is op het SCE vormgegeven door in het leerlingenrooster 5 studiehuisuren op te nemen. Waaraan deze uren besteed worden kunnen de leerlingen zelf bepalen zolang ze maar te vinden zijn in de ruimten van het Studiehuis, het experimenteer-laboratorium of de tekenlokalen.
Tijdens deze studiehuisuren wordt er zeer intensief gebruik gemaakt van de computers. Deze zijn onderdeel van een bovenbouw-onderwijs-netwerk en dankzij Kennisnet aangesloten op Internet. Voor het onderhoud is een full-time systeembeheerder verantwoordelijk. Om te voorkomen dat leerlingen hun tijd verdoen met chatten en surfen, mogen ze alleen van internet gebruik maken als ze kunnen aantonen dat de docent daar toestemming voor gegeven heeft op de leerling-gebonden internetkaart. Elke leerling heeft een eigen inlognaam, eigen wachtwoord en een eigen account op de server en hiervan wordt een logboek bijgehouden zodat eventueel misbruik kan worden nagegaan. Dat laatste is in twee jaar tijd slechts twee maal voor-gekomen: een e-mailbom en opgehaalde porno. Aan beide kwajongens is enige tijd de toegang tot de mediatheek ontzegd.

Het is een vreemde ervaring. Eigenlijk zou ik op dit moment 5-VWO hebben, maar er zitten maar twee leerlingen in het lokaal te werken. Ik ren door het studiehuis en kom overal enthousiaste leerlingen tegen: achter de PC, met hun neus in de boeken, studerend op bladmuziek, overleggend, ruziënd, studerend. Ze bestoken me met vragen, willen weten of ze op de goede weg zijn of uitten hun teleurstelling, omdat ze nog niet genoeg informatie naar hun zin gevonden hebben. Ik voel me als een vis in het water, geniet van leerlingen

Overzicht praktische opdrachten VWO 5

π
Bij het berekenen van de omtrek van een cirkel ben je voor het eerst π tegengekomen. Toen heb je geleerd dat $\pi \approx 3{,}14$. Op je GR is $\pi \approx 3{,}141592654$.... Zoek de werkwijze van de benadering van π door Archimedes en C. Huygens op. Zoek en verklaar nog drie andere benaderingen.
Verder: Onderzoek waar π nog meer voorkomt of schrijf een programma dat π met 20 decimalen nauwkeurig uitrekent of ga na hoe je op de GR π kunt benaderen.

Piramidespel
Onderzoek een piramidespel en geef een analyse waarom in Albanië een volksopstand plaatsvond.

Platonische lichamen
Ga op zoek naar platonische lichamen en de bijbehorende grafen. Zoek uit waarom er slechts eindig veel regelmatige lichamen zijn.

Landkaarten kleuren
Met hoeveel kleuren kun je een landkaart minimaal inkleuren als je eist dat twee aan elkaar grenzende landen niet dezelfde kleur mogen hebben?

Numeriek nulpunten bepalen
Veel vergelijkingen kun je niet of niet eenvoudig oplossen. Een voorbeeld is bijvoorbeeld de vergelijking $x^6-x+1=0$. Toch bezitten die vergelijkingen oplossingen, die je waarschijnlijk met behulp van je GR wel kunt bepalen. Maar hoe werkt dat eigenlijk.....

Rozen, limacons en andere krommen
Bestudeer hoe je "gewone" coördinaten omrekent naar poolcoördinaten en andersom. Onderzoek hoe je poolcoördinaten op de GR moet tekenen.

Zeepbellen en zeepvliezen.
Leg de relatie tussen zeepbellen en Voronoi-diagrammen. Zoek voorbeelden van "zeepvliezen" in de architectuur. Maak eventueel zelf een zeepvlies.

Wiskunde A-lympiade
Bestemd voor degenen die op 22 november met de wiskunde A-lympiade wedstrijd van het Freudenthal Instituut hebben meegedaan.

De goedkoopste route
Ontwerp een algoritme of schrijf een programma om de goedkoopste route in een graaf te kunnen berekenen.

Telefoonverbindingen op het eiland Hau.
Ontwerp meerdere algoritmes of schrijf een programma om een telefoonnet aan te leggen.

Muzikale exponenten
Onderzoek de wiskunde achter onze toonladder. Onderzoek ook de wiskundige verbanden achter andere toonladders.

Sterrenkunde
Om de afstand tussen sterren en sterrenstelsels te kunnen weergeven is er een exponentiële schaal ontwikkeld. Zoek deze op en verklaar deze. Onderzoek ook de wiskundige verbanden achter de helderheid van sterren. Eventuele verbanden bij andere dan zichtbare bronnen.

De maat van het leven.
Er zijn veel logaritmische en dus exponentiële verbanden te vinden in de biologie. Denk daarbij aan spiralen, groei, etc. Zoek en onderzoek deze. B.v waarom kan een olifant niet vliegen?

die genieten van wiskunde. Ik controleer of iedereen er is: een groepje van drie is naar de Openbare Bibliotheek vertrokken om daar de kranten van 1996 door te nemen. Hun PO gaat over het 'Pyramidespel' en ze zijn geïnteresseerd in de rol die dit kansspel heeft gespeeld bij de machtswisseling in Albanië.

In elk profiel en in elk leerjaar staat voor wiskunde een PO gepland die telt voor de overgang én voor het examendossier. In het VWO cohort 1998 is en blijven de PO's 40% uitmaken van het Schoolexamen, opgebouwd uit 10% in leerjaar 4, om het te leren, en elk 15% in leerjaar 5 en 6. Helaas is het niet mogelijk ook 40% van de studielasturen (slu's) hiervoor te reserveren, omdat het curriculum daar voor te vol is. Het aantal slu's wat hiervoor is gepland, is achtereenvolgens 7, 10 en 10. In de week voor de kerstvakantie kunnen de wiskunde-uren door de leerlingen zelf ingevuld worden.
In de week daaraan voorafgaand deel ik een opsomming met korte beschrijvingen van onderwerpen uit. Deze onderwerpen haal ik uit de methodes, uit eigen bronnen, hobby's en uit publicaties van het Freudenthal Instituut, VEEX, (Vrouwen en Exacte Vakken), APS en SLO. Voor deze groep van 47 leerlingen waren dit 20 ideeën. Ze mogen in groepjes van maximaal drie een PO uitvoeren, maar één van de drie PO's die ze in totaal moeten maken, moeten ze alleen doen. Leerlingen mogen ook zelf een onderwerp aandragen en na overleg uitvoeren. Die lijst van onderwerpen probeer ik zoveel mogelijk aan te laten sluiten bij de belangstelling binnen die groep.
Ik misbruik de PO's om het vak wiskunde te promoten en de leerlingen te laten ervaren, dat wiskunde verweven zit in bijna alles waarmee ze bezig zijn.
Er mogen maximaal drie groepjes met hetzelfde onderwerp aan de slag. Is een onderwerp eenmaal gekozen, dan maak ik daarbij een opdrachtenblad.

Tijdens de ouderavond heb ik een gesprek met de ouders van Suzanne. Daaruit blijkt dat Suzanne het een probleem vindt, dat ze deze PO alleen moet maken. Ze zoekt haar onderwerp in de hoek van de biologie maar de PO 'De maat van het leven' kan ze nog geen kop of staart geven. Ik realiseer me, dat ik niet in de gaten had dat ze met deze PO zo'n problemen had en spreek met haar ouders af haar een eindje op weg te helpen. De volgende dag zoek ik in de mediatheek en mijn eigen bibliotheek een aantal boeken uit die ze als leidraad zou

Praktische opdracht voor WISKUNDE
VWO 6

Planning.

Het onderstaande schema geeft een overzicht van de geschatte tijd per onderdeel van deze praktische opdracht. Deze tijden kunnen je helpen bij het maken van je planning. Deze tijden zijn steeds per persoon:

1.Oriëntatie	0.5 slu
2.Onderzoek:	
planning en voorbereiding:	2 slu
uitvoering	5 slu
3.Presentatie:	2 slu
Bespreking met docent:	0.5 slu
Totaal:	10 slu

Beoordeling

De beoordeling van deze praktische opdracht gaat als volgt: (de genoemde scores zijn maximale scores)

1.Proces:	
gebruik logboek	5
planning	5
hulp docent en/of anderen	5
2.Verslag:	
vormgeving	5
taalgebruik, ook wiskundig	5
creativiteit	5
inleiding/oriëntatie	5
onderzoek	20
gebruik wiskunde	25
conclusies en antwoord	10
diversen	10
Totaal	100 punten

Opmerking 1:
Indien het verslag niet op tijd wordt ingeleverd, 5 maart 2001, worden 10 punten van het proces in mindering gebracht.

Opmerking 2:
In geval van een gelijkwaardige inbreng van alle leden van de groep krijgen alle leden hetzelfde punt. Als dit niet het geval is, kan de begeleidende docent van dit systeem afwijken.

kunnen gebruiken. Ze ziet het helemaal zitten en gaat vol goede moed aan de slag.

Het opdrachtenblad kent een standaard die binnen het SCE zoveel mogelijk gebruikt wordt. Het is ontworpen door een aantal docenten van verschillende vakgroepen. Omdat de vakgroep wiskunde het standpunt heeft uitgesproken dat een van de doelen van een PO is het zelfstandig doorwerken van een stukje wiskunde dat aansluit bij de lesstof of dat tijdens de les niet genoeg uitgediept wordt, hechten we minder belang aan het zelf vinden van bronnen. Binnen de ICT-lessen is dat uitvoerig aan bod gekomen en de leerling hoeft niet elke keer opnieuw aan te tonen dat hij weet waar hij de informatie moet zoeken. Bovendien is er juist over wiskunde zoveel op Internet en zo weinig in de bibliotheek te vinden dat het erg efficiënt is de leerling al direct op het juiste spoor te zetten.
Ik ga zelf ook op zoek op Internet en in de bibliotheek en steek daar vele uren in. Bijkomend voordeel is dat ik zelf heel goed op de hoogte raak van wat er voor de leerlingen zo voor het grijpen ligt; ik vind dit zelf ook leuk om te doen. Bij elke PO vermeld ik minstens twee sites en zoek ik ook twee titels van boeken. Vaak zijn dat Engelstalige boeken, maar voor VWO-bovenbouw mag dat geen bezwaar zijn; als ze maar op een leesbare manier geschreven zijn. Bovendien bestaat onze populatie leerlingen voor een deel uit TVWO'ers (tweetalig opgeleiden) die zelf ook hun PO in het Engels schrijven.
Op het opdrachtenblad staan ook een aantal hulp-vragen. Deze vragen zijn zo gesteld, dat als een leerling de vragen kan beantwoorden, hij de gevraagde stof heeft doorgewerkt. Het komt nogal eens voor, dat een leerling in zo'n vraag blijft steken, omdat hij die zo interessant vindt, of omdat zo'n vraag meer vragen oproept. In overleg met de docent kan hij zo een geheel eigen inbreng in een PO hebben. Dat levert in de beoordeling in ieder geval extra punten op.

Voor de PO 'Het pyramidespel' kon ik zelf op internet geen sites vinden en dat viel me heel erg tegen. Bij het uitdelen van de opdrachtenbladen heb ik dat gemeld aan de leerlingen. Zij zagen dat niet zo somber in en

recursief tellen 29-05-2001 22:22

AANSLUITINGSPROJECT TUE - VO

[startpagina] [omhoog] [RSA-geheim] [recursief tellen] [nulpunten] [vierkleurenprobleem]
[negen- elfproef] [tripels] [willekeurige getallen] [lijnen in driehoek] [Platonische lichamen] [rijden maar]
[cont kansen] [dobbelen] [De wet van Benford] [rozen] [superellipsen van Piet Hein]

Praktische Opdracht

Recursief tellen?

Probleemomschrijving

Op hoeveel manieren kun je drie leerlingen uit een groep van 30 aanwijzen? Op hoeveel manieren kunnen 8 mensen om een ronde tafel gaan zitten?

Deze vragen zijn bekende telproblemen. In klas 4 heb je ze misschien moeten oplossen. De antwoorden zijn 4060 en 5040. Met de theorie over permutaties en combinaties kun je die antwoorden vinden. Maar er zijn ook telproblemen waarbij je anders te werk kunt of moet gaan.

Bekijk alle verschillende rijtjes met lengte 15 die uit enen en nullen In totaal zijn dat er $2^{15} = 32768$. Dat is niet moeilijk. Maar hoeveel zijn het er als je als extra voorwaarde stelt dat er geen twee nullen achter elkaar mag staan?

Dit probleem is niet meer zo eenvoudig. Toch is er een methode die hier hulp brengt. Die methode heet recursief. Je telt eerst het aantal rijtjes bij een kortere lengte, bijvoorbeeld rijtjes met lengte 1 en rijtjes met lengte 2. Die kun je "gewoon" tellen"

lengte 1	0	1				aantal(1) = 2
lengte 2	01	10	11			aantal(2) = 3
lengte 3	010	011	101	110	111	aantal(3) = 5

De vraag is nu: wat is aantal(15)?

Dat antwoord kun je vinden als je een formule kent die aantal(n) uitdrukt in de aantallen van kortere rijtjes, dus in aantal(n-1), aantal(n-2) etc. Je kunt met die formule dan aantal(4) bepalen met behulp van de gevonden aantallen, 2, 3 en 5. En daarna kun je aantal(5) op zijn beurt weer bepalen met aantal(4) en de eerdere resultaten. Etc. Dit telproces heet recursief tellen. Maar de vraag is nu natuurlijk: wat is de recursieve formule? Hoeveel voorgaande termen moet je eigenlijk kennen?

Voor wie

alle profielen

Omvang

8 slu

Beginkennis

Domein Eg; subdomein combinatoriek en kansrekening: Je moet bij een meetkundige rij de formules voor term en som kunnen gebruiken

maakten er een wedstrijd van wie de eerste site of krant zou vinden; zij hebben een heilig vertrouwen dat alles op internet te vinden is. Daarin kregen ze gelijk: ze vonden er meerdere en verwerkten deze in de PO met adviezen aan mij welke site ik het beste in de bron-vermelding van volgend jaar kan zetten. Ze vonden dat ze daarvoor wel extra punten moesten krijgen.

Het internet is erg populair in de zoektocht naar bronnen. Daarbij hanteer ik zelf enkele sites die een soort deur zijn voor een surftocht over de wiskunde onderwerpen. Deze sites zijn:

- *http://www.digischool.nl*, de Digitale School, en, met name voor het VO, het vaklokaal wiskunde;
- *http://www.nvvw.nl*, de site van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, met hyperlinks naar alle in wiskundig Nederland op internet actieve instanties en personen;
- *http://www.math.rug.nl*, Rijksuniversiteit Groningen, om de vele hyperlinks naar de geschiedenis van de wiskunde.

Verder maak ik veel gebruik van de boeken van de Wetenschappelijke Bibliotheek horend bij het tijdschrift Natuur en Techniek en ook het tijdschrift zelf, van het tijdschrift Pythagoras en de kalender van de stichting Vierkant voor wiskunde.
Ook vormen vele posters een bron van inspiratie; deze koop ik op de studiedagen van de NVvW.

Dat het niet zo eenvoudig is de juiste sites te vinden hebben Johan en Mike ervaren. Zij werken aan de PO 'De Geschiedenis van de Logaritmen'. In de methode wordt een zekere Napier vermeld als degene die het eerst de term logaritme heeft gebruikt. Alle zoekmachines waarmee ze bekend zijn, gebruiken ze, maar ze komen geen bit verder. Een andere groep die aan dezelfde PO werkt, helpt hen na verloop van tijd op weg. Napier staat beter bekend onder de naam Neper. Toen was informatie al vlug gevonden.

Vrijdags na de kerstvakantie worden de PO's ingeleverd. Het is een hele stapel die bestaat uit prachtige werkstukken op papier, op floppen, op CD-roms, op cassettebandjes en op audio-CD's. Deze werkstukken

Stedelijk College Eindhoven

Schutblad praktische opdracht

Vak :Wa, Wb	Docent :M.Lambriex H.Vugts	Onderdeel: Recursief tellen	
Inleverdatum: 5-03-2001	Slu:10	Domein :	Eindterm :

Onderzoeksvaardigheden binnnen de praktische opdracht						
Onderzoeksstap	Wie?		Welke aktiviteiten			
	Ll'n	Doc		Groep	Indiv	ICT
1. De onderzoeksvraag	X	X	Onderzoek een telproces: recursief tellen	Ja, max 3 pers	Ja	Ja Indien nodig
2. Het onderzoeksplan	X X X	☐ ☐ X	Aangeven van stappenplan Nader invullen van het stappenplan - Individueel of in groep, met wie? - Wat moet er gebeuren - In welke volgorde - Door wie? - Tijdsplanning Nagaan of het stappenplan haalbaar is	Ja	Ja	
3. Informatie verzamelen	X	X	Mogelijke bronnen zijn: www.tue.nl/~jessers/aansluiting/recursieftellen.htm Tijdschrift Pythagoras	Ja	Ja	Ja
4. Informatie verwerken	X X X	☐ ☐ ☐	Maak de inleidende vragen Verwerking van de gegevens in tabellen en/of grafieken Analyse van de gegevens gericht op de onderzoeksvraag	Ja	Ja	Ja
5. Beantwoorden van de inleidende vragen	X X X X	☐ ☐ ☐ ☐	Ga naar de opgegeven site en maak de opdrachten die daar staan. Maak ook de opdrachten op de bijlage. Ergens in school hangt een poster die gaat over recursief tellen. Bestudeer deze. Vat al het geleerde samen in een stukje theorie	Ja	Ja	Ja
6. Eigen mening of conclusies	X	☐			Ja	
7. Presentatie	X	☐	Schriftelijk, maar in overleg kan vooraf voor een andere vorm gekozen worden.	Ja	Ja	Ja
8. Terugblik	☐	☐				
LOGBOEK	Ja			Presentatievorm Schriftelijk		

bevatten verslagen, eigen gemaakte computer-programma's, posters en muziek. Een weerslag van alle informatiedragers zoals ze ook in de mediatheek voor-komen, met uitzondering van video.
Wie durft nog te beweren dat wiskunde een saai vak is? Ondanks alle vermaningen dat het om de wiskunde gaat, en niet om het mooi maken van de presentatie - en daar niet onnodig veel tijd en geld voor kleuren-prints aan te besteden - hebben de meesten het niet kunnen laten. Het ene werkstuk ziet er nog fraaier uit dan het andere. Menig ouder zal daar op zijn/haar werk een steentje, of beter gezegd een printje, aan hebben bijgedragen.

Op de achtergrond klinkt de fuga van Bach, terwijl ik een fractal (een zichzelf herhalende meetkundige structuur) op mijn beeldscherm zie ontstaan. Ik geniet van het nakijken en ik leer veel van het werk van mijn leerlingen. Het kost veel meer tijd dan ik had ingeschat en het duurt lang voordat alle werkstukken zijn nagekeken; de leerlingen mopperen terecht dat het zo lang duurt. Ze zijn zo benieuwd naar hun beoordeling want ze verwachten een hoge waardering. En niet onterecht, het gemiddelde is een dikke 8.

De normering ligt van de voren vast en is toegevoegd bij het opdrachtenblad, zodat de leerlingen van te voren weten welke aandachtspunten gewaardeerd worden. Het is belangrijk dat je als docent ook van te voren vastlegt welke specifieke wiskundige items in een PO naar voren moeten komen. Bijvoorbeeld, in de PO 'De rij van Fibonacci' moet ook de 'gulden snede' besproken worden.
Er gaat veel tijd in het nakijken en beoordelen zitten. Eerst de PO doorlezen, luisteren en afspelen, dat nogmaals met de normering ernaast en aantekeningen maken van wat erg opvallend is. Dan een volgorde opstellen van de PO's met hetzelfde onderwerp en vervolgens de score vaststellen met motivatie. Per PO toch wel een uur. Daarbij evalueer je, of een onderwerp voor volgend jaar nog geschikt is, en of de PO ook aanzet voor een profielwerkstuk kan zijn.

Het is heel druk rond mijn bureau; vol verwachting staan mijn leerlingen naar de stapel beoordelingen te kijken. Ze bestuderen mijn aantekeningen en motivatie van hun cijfer. Ze zijn bijna allemaal tevreden. Alleen Wouter niet; hij had geen punten gekregen voor het procesonderdeel logboek, terwijl hij beweerde dat hij wel

Beoordelingsformulier van een Praktische opdracht voor WISKUNDE.

Gemaakt door: Karen Sleegers
Denise Staal

Groepswerk: Ja ~~Nee~~
Klas: VWO 4 hue
Onderwerp: Fibonacci

Waardering: 7,5

Verantwoording beoordeling.

	Behaalde / max.score
1. **Proces**:	
gebruik logboek	5 / 5
planning	5 / 5
hulp docent en/of anderen	5 / 5
2. **Verslag**:	
vormgeving fraai en netjes	5 / 5
taalgebruik, ook wiskundig nogal bondig	3 / 5
creativiteit veel gevarieerde voorbeelden	5 / 5
inleiding/oriëntatie summier	2 / 5
onderzoek Erg veel te vinden over Fibonacci Waarom φ en de gulden snede niet verder uitgewerkt	15 /20
gebruik wiskunde Ik mis de directe formule en er zijn nog meer wiskundige verbanden in de rij te vinden.	15 /25
conclusies en antwoord uitvoerig	10 /10
diversen Voor een groepje van 2 had ik meer diepgang verwacht	5 /10
3. **Totaal**	75 /100 punten

Opmerking 1:
Indien het verslag niet op tijd wordt ingeleverd, 12 januari 2001, worden 10 punten van het proces in mindering gebracht.

Op tijd ingeleverd: Ja / Nee Vermindering:

Opmerking 2:
In geval van een gelijkwaardige inbreng van alle leden van de groep krijgen alle leden hetzelfde punt. Als dit niet het geval is, kan de begeleidende docent van dit systeem afwijken.

een logboek had bijgehouden. Zijn PO komt uit mijn tas en hij mag alsnog laten zien waar het onderdeel logboek dan is. Het zit er niet tussen; vergeten te printen en bij inlevering niet meer op volledigheid gecontroleerd. Jammer, maar hij is het nu wel met me eens.

Er valt over PO's nog heel veel meer te vertellen. Bijvoorbeeld over hoe de staatssecretaris er mee om gaat, over het verschil in kwaliteit tussen de PO's gemaakt door Maatschappij- en Natuur- profiel-leerlingen, of dat PO's veel beter aansluiten bij de leerstijl voor meisjes, maar dan vul ik nog wel twee artikelen.
Sinds kort hebben we een nieuwe mediathecaris, die een beleidsplan heeft opgesteld waarin de rol van de mediatheek prominent is. Een van de dingen die ik zelf van deze ronde PO's heb geleerd is, dat hoe beter de samenwerking van de docent met de mediatheek is, des te efficiënter de leerlingen hun PO's kunnen maken.

Ik ben begonnen met Elke, zeer begaafd in de exacte vakken en muziek. Ik sluit af met een citaat uit de evaluatie van haar werkstuk:

'Op een gegeven moment kon ik niet meer stoppen. Ik stond met de fuga op en ik ging er mee naar bed. Werkelijk overal was ik er mee bezig. Ik werd helemaal gek van mezelf... Ik moest de fuga eerst muzikaal een beetje begrijpen en onder de knie hebben, voordat ik aan de logica kon sleutelen. Nu kon ik ook de theorie uit de boeken erbij betrekken en ik ontdekte keer op keer dat er weer iets klopte.'

Na dit werkstuk koos Elke definitief voor een vervolgstudie aan het conservatorium.

Noot

[1] Op de dit jaar in Leiden, Zwolle en Eindhoven georganiseerde Regionale studiedagen leidde Marianne Lambriex een workshop onder de titel 'Praktische opdrachten en het internet'.
Het onderhavige artikel en de illustraties vormden een deel van de 'handout' bij die workshop.

Over de auteur
Marianne Lambriex-van der Heijden (e-mail: m.lambriex@nvvw.nl) is docent wiskunde aan het Stedelijk College Eindhoven. Op die school is zij tevens IT-projectleider. Zij maakt deel uit van het bestuur van de NVvW.

Vooraf

Ook dit keer een tweetal puzzels die ons zijn bezorgd door collega Herman Ligtenberg.
Naar we verwachten kan de ladder van Jan de Geus met ingang van jaargang 77 weer beklommen worden.

Puzzel 3

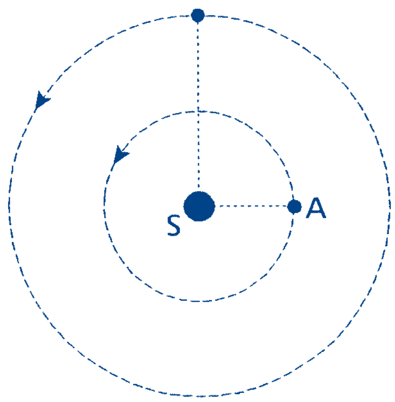
Om een ster S cirkelen twee planeten, A en B. We nemen aan dat ze in hetzelfde vlak en in dezelfde richting draaien, met S als middelpunt. De straal van de cirkelbaan die A beschrijft, is de helft van die van B. De omloopstijden voldoen aan de derde wet van Kepler. Deze houdt in, dat de verhouding r^3/T^2 voor beide planeten gelijk is. Daarbij is r de straal van de cirkelbaan en T de omloopstijd. Planeet A heeft een omloopstijd van 1 jaar.
Op zeker moment vormen de punten S, A en B een rechthoekige driehoek, zoals in de figuur is weergegeven. Hoe lang zal het duren voordat deze driehoek voor het eerst weer rechthoekig is?

Puzzel 4

Gegeven is een Pythagoreïsche driehoek, waarvan de verhouding tussen de lengtes van de zijden – dat zijn *dus* gehele getallen – *niet* vereenvoudigbaar is. De ingeschreven cirkel van de driehoek heeft een straal 7.
Vind de lengtes van de zijden van die driehoek (er is meer dan één mogelijkheid).
Overigens is in dit verband ook te bewijzen, dat de straal van de ingeschreven cirkel van een Pythagoreïsche driehoek altijd een geheel getal is.
Wist u al hoe groot die straal is van de 3-4-5-driehoek?

Achteraf

Insturen van de oplossingen, die we zullen publiceren in het eerste nummer van de nieuwe jaargang, is niet nodig.

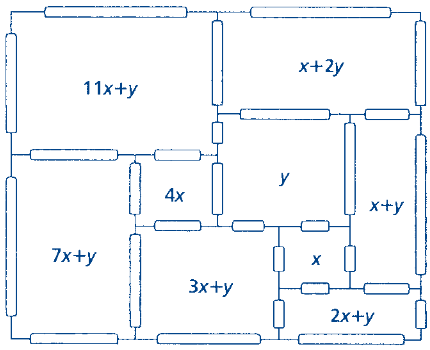


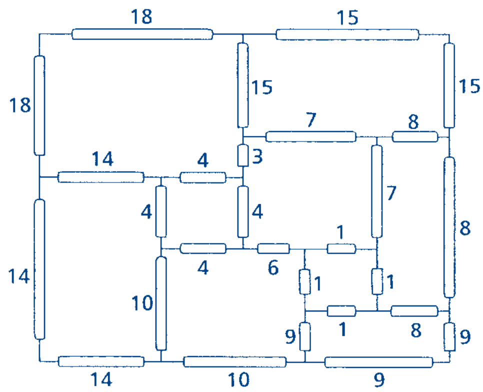
Oplossingen 000

Hieronder staan de oplossingen van de beide puzzels uit Euclides 76-7 (mei 2001), pagina 287.

Oplossing Puzzel 1

In het midden van elke rechthoek is aangegeven hoeveel bomen die rechthoek aan elk van zijn vier zijden heeft. Als we ergens willekeurig met x en y beginnen, zien we vrij snel dat: $x + 2y = 15$ (die 15 was gegeven) en $18x + 2y = 4x + 4y$. Daaruit volgt: $x = 1$ en $y = 7$. De figuur is nu gemakkelijk verder in te vullen. Het totale aantal bomen is 237.

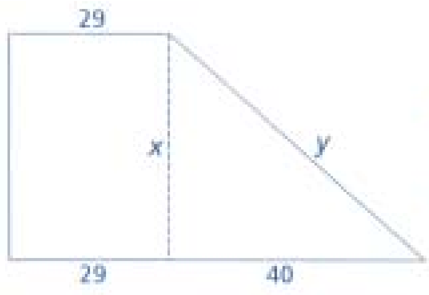


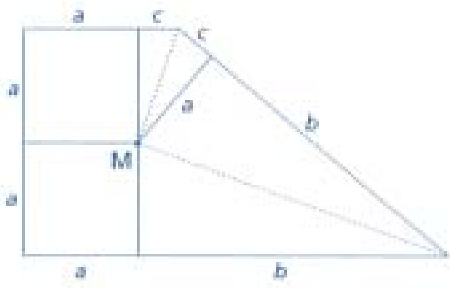


Oplossing Puzzel 2

Het is duidelijk dat het trapezium een *ingeschreven* cirkel heeft. Noemen we de lengtes van de twee 'opstaande' zijden x en y, dan is $x + y = 29 + 69 = 98$. Bovendien geldt: $y^2 - x^2 = 40^2$. Hieruit volgt weer: $y - x = \frac{1600}{98}$. Dan vinden we: $x = \frac{2001}{49}$. Daar $x =$ de hoogte van het trapezium, volgt als oppervlakte: $\frac{1}{2} \times (29 + 69) \times \frac{2001}{49} = 2001\ m^2$.
Deze oppervlakte is gelijk aan het *product* van de evenwijdige zijden: 29 × 69. Dit is beslist geen toeval, want er kan bewezen worden dat dit algemeen geldig is.

Noem M het middelpunt van de ingeschreven cirkel (met straal a) van het trapezium. De oppervlakte van de gehele figuur is
$O = a\,(2a + b + c) = 2a^2 + ab + ac$.
Verder zijn de gestippelde lijnen vanuit M binnen- en buitenbissectrice, zodat ze loodrecht op elkaar staan.
Dan zal $a^2 = bc$ en dus $O = (a + b)(a + c)$.





Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskunde-docenten toegankeljke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk door geven aan de hoofd-redacteur. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in het komende schooljaar. Achter de verschijningsdata is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld.
Doorgeven kan ook via
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

nr	verschijnt	deadline
1	13 september 2001	31 juli 2001
2	25 oktober 2001	11 september 2001
3	06 december 2001	23 oktober 2001
4	18 januari 2002	27 november 2001
5	28 februari 2002	15 januari 2002
6	11 april 2002	26 februari 2002
7	23 mei 2002	08 april 2002
8	24 juni 2002	10 mei 2002

vr. 24 en za. 25 augustus (Eindhoven)
vr. 31 aug. en za. 1 sep. (Amsterdam)
Vakantiecursus 2001: Experimentele wiskunde
Organisatie CWI, Amsterdam

vr. 24 en za. 25 augustus
T³-Symposium, Leuven (België)
Organisatie T³-Belgie en T³-Nederland

woensdag 19 september
Nascholingscursus Kansrekening
Organisatie Vrije Universiteit, Amsterdam

vrijdag 28 september
KUN-wiskundetoernooi (zie onderstaand kader)
Organisatie Katholieke Universiteit, Nijmegen

Ter ere van het 10-jarig jubileum van het wiskundetoernooi zal professor Arthur Benjamin tijdens de lunch een wiskundeshow verzorgen. Deze 'mathemagician' treedt regelmatig op in het Magical Castle in Hollywood en geeft over de hele wereld shows om te laten zien hoe intrigerend wiskunde is. Hij blijft het publiek verbazen met zijn goede geheugen en zijn rekenvaardigheid. Ook legt hij uit hoe hij dit allemaal doet. Benjamin ontving in 2000 een `Deborah and Franklin Tepper Haimo award for Distinguished College or University Teaching of Mathematics' (*http://www.math.hmc.edu/faculty/benjamin/homepage.htm*).

zaterdag 17 november
Jaarvergadering/studiedag NVvW
Hogeschool Domstad, Utrecht
Zie p. 306 in dit nummer.

vrijdag 23 november
Voorronde Wiskunde A-lympiade
Organisatie Freudenthal Instituut

Voor internet-adressen zie de website van de NVvW: *http://www.nvvw.nl/Agenda2.html*

Publicaties van de
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* *Zebra-boekjes*
1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen

Prijzen van de Zebra-boekjes:
Schoolabonnement: 6 exemplaren van 5 delen voor *f* 400,-
Individueel abonnement voor leden: *f* 75,-
Losse boekjes voor leden: *f* 16,50
Deze bedragen zijn inclusief verzendkosten.
Bestellen kan door het juiste bedrag over te maken op Postbanknummer 5660167 t.n.v. Epsilon Uitgaven te Utrecht onder vermelding van Zebra (1 t/m 5) of Zebra (6 t/m 10). Zelf ophalen kan in de losse verkoop; ledenprijs op bijeenkomsten *f* 12,50; in de betere boekhandel *f* 16,75.

* *Nomenclatuurrapport Tweedefase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta - wiskunde, formules en tabellen*
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.
ISBN 900165956X; prijs *f* 15,00; te bestellen in de boekhandel.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (*http://www.nvvw.nl/lustrumboek2.html*).
Leden: *f* 50,00;
niet-leden: *f* 62,50 (incl. verzendkosten).
Zie eventueel ook de advertentie in Euclides 76-7 (na p. 288).

advertentie Pythagoras